複素双曲空間内の等質部分多様体に関するいくつかの話題*

田丸 博士† (広島大学大学院理学研究科)

概要

本稿では, 複素双曲空間内の等質部分多様体に関する話題のうち, 等質超曲面の分類 (Berndt & Tamaru, 2007) 以降に進展した部分について概説する．特に, 複素双曲空間内の弱鏡映部分多様体, 複素双曲空間内の等質 Ricci soliton 超曲面, および複素双曲平面への余等質性 2 作用に関して, 現在までに得られている結果を紹介する.

1 導入

複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の部分多様体は, それ自身の豊かさに加えて, 一般の非コンパクト型対称空間内の部分多様体の研究に有益な示唆を与えるという意味でも, 興味深い研究対象である．$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ はもちろん非コンパクト型対称空間の一つであるが, 最近の研究を通して, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ は単に「そのうちの一つ」という以上の位置を占めるのではないかと感じている．実際, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面の分類 ([4]) は, その後の非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の研究 ([5]) への, 重要な足掛かりとなった.

本稿では, 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の部分多様体に関して, 部分多様体が等質である場合に話を限定して, 得られている結果をいくつか紹介する．なお, 等質超曲面の分類 ([4]) については, いくつかの機会に講演させて頂き, 解説 ([12, 13]) も書かせて頂いたので, 今回はそれ以降の進展に重点を置く．本稿では, 後に必要となるリー代数の準備を §2 でした後で, §3, 4, 5 において, 以下の 3 つの話題を紹介する.

§3 では, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内に等質な弱鏡映部分多様体が大量に存在することを紹介する．ちなみに, 部分多様体が弱鏡映ならば austere であり, austere ならば極小である．特に, 等質極小線織実超曲面は, austere であることは知られていたが, 実は弱鏡映でもあることが分かる.

§4 では, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質な Ricci soliton 超曲面について述べる．特に, リー超曲面と呼ばれるクラスの中で, Ricci soliton なものを分類し, 以下の結果を得た: $n > 2$ の時は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Ricci soliton なリー超曲面はホロ球面のみだが, $n = 2$ の時は $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ 内の Ricci soliton なリー超曲面はホロ球面と等質極小線織実超曲面の 2 つ存在する．なお, この結果は, 橋永氏・久保氏との共同研究 ([7]) で得られたものである.

---

* 部分多様体の微分幾何学及び関連課題–前田定廣先生還暦記念研究集会– (佐賀大学, 2012/08/04–06) 講演予稿

† tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

§5 では, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用について紹介する. 等長的作用の余等質性とは, 最大次元の軌道の余次元のことである. よって, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用は, 等質な曲面の研究に直接繋がる. なお, この結果は松崎氏の修士論文 ([11]) で得られたものである.

最後になったが, 筆者が, 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ を「単に非コンパクト型対称空間のなかの一つ」以上の重要性を持つと考えて, 上記のような研究を行うようになったことに対しては, 前田定廣先生からの影響が極めて大きい. この場を借りて感謝いたします.

2 リー代数の準備

この節では, 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に付随するリー代数の準備を行う. 良く知られているように, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ は次の等質空間表示を持つ:

$$\mathbb{C}\mathrm{H}^n = \mathrm{SU}(1,n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(n)). \tag{2.1}$$

以下, リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1,n)$ の性質に関する準備を行う. ここで述べる事柄は, 対称空間の一般論で良く知られていることだが, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の場合に限定すれば, 全てを行列で具体的に表示して確かめることも可能である.

まずは, Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を考え, $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を取ることにより, 以下の制限ルート空間分解が得られる:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}. \tag{2.2}$$

定義 2.1. 制限ルート空間分解から, 以下の 3 つの部分リー代数が得られる:

(1) $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を **岩澤分解の冪零部分** と呼ぶ.

(2) $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を **岩澤分解の可解部分** と呼ぶ.

(3) $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}$ を **放物型部分リー代数** と呼ぶ.

ちなみに **岩澤分解** とは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ というベクトル空間としての直和分解である. 次に, 上記のリー代数の構造を簡単に述べる.

命題 2.2. 以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{n}$ は Heisenberg リー代数である. すなわち, $\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ と $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ の基底 $\{Z_0\}$ で, bracket 積の関係式が次をみたすものが存在する:

$$[X_i, Y_i] = Z_0 \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{2.3}$$

(2) $\mathfrak{a}$ は 1 次元であり, 次を満たす $A_0 \in \mathfrak{a}$ が存在する:

$$[A_0, X_i] = (1/2)X_i, \quad [A_0, Y_i] = (1/2)Y_i, \quad [A_0, Z_0] = Z_0. \tag{2.4}$$

(3) $\mathfrak{q}$ は次の分解を持つ:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k}_0 := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{u}(n-1). \tag{2.5}$$

これら $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{q}$ に対応する連結リー部分群を, それぞれ N, S, Q で表す.

命題 2.3. 可解リー群 S に対して, 以下が成り立つ:

(1) S は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に単純推移的に作用する, すなわち, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ は S に然るべき左不変計量を入れた空間と等長的である (これを $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の **可解モデル** と呼ぶ).

(2) 原点での接空間 $T_o\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ とリー代数 $\mathfrak{s}$ を同一視して, $\mathfrak{s}$ 上に複素構造を定義する. このとき, $\mathfrak{g}_\alpha$ は複素線型部分空間である.

(3) 上記の基底 $\{A_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Z_0\}$ が正規直交となるような内積を $\mathfrak{s}$ に入れておくと, 得られる左不変計量は一定の正則断面曲率 -1 を持つ.

複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ は, 可解リー群 S に左不変計量と左不変複素構造を入れた空間とみなすことができる. 以下の議論では, この可解モデルが本質的である.

3 複素双曲空間内の弱鏡映部分多様体

弱鏡映部分多様体は, 井川 & 酒井 & 田崎 ([8]) によって定義された概念である. この節では, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質部分多様体の中で, 弱鏡映になるものが大量に (連続的に) 存在することを紹介する.

定義 3.1. リーマン多様体 $\bar{M}$ 内の部分多様体 M に対して,

(1) M が **弱鏡映** であるとは, 次が成り立つこと: 任意の $p \in M$ および任意の法ベクトル $\xi \in \nu_p M$ に対して, 以下をみたす $\sigma \in \mathrm{Isom}(\bar{M})$ が存在する:

$$\sigma(p) = p, \quad \sigma(M) = M, \quad (d\sigma)_p(\xi) = -\xi. \tag{3.1}$$

(2) M が **austere** であるとは, 次が成り立つこと: 任意の $p \in M$ および任意の法ベクトル $\xi \in \nu_p M$ に対して, ξ 方向の主曲率全体の集合が重複度も込めて -1 倍で不変.

定義から容易に分かるように, 鏡映部分多様体は弱鏡映であり, austere 部分多様体は極小である. さらに, 次が成り立つ.

命題 3.2 ([8])**.** 弱鏡映部分多様体は austere である.

与えられた部分多様体が弱鏡映であることを証明できれば, 弱鏡映性は変換群に関する性質なので, 曲率の計算を全くしないで austere 性や極小性を示すことができる.

定理 3.3. $\mathfrak{v}$ を $\mathfrak{g}_\alpha$ 内の任意の線型部分空間とする. このとき, $\mathfrak{s}_\mathfrak{v} := \mathfrak{s} \ominus \mathfrak{v}$ は部分リー代数であり, 対応する連結リー群 $S_\mathfrak{v}$ の原点を通る軌道 $(S_\mathfrak{v}).o$ は弱鏡映である.

例えば, $\mathfrak{v}$ の Kähler 角度が異なれば, それぞれの $(S_\mathfrak{v}).o$ は合同でない. このことから, $n \geq 3$ ならば, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内には等質な弱鏡映部分多様体が連続的に存在することが分かる.

注意 3.4. 上記の定理は特別な場合として次を含む:

(1) $\mathfrak{v}$ が $\mathfrak{g}_\alpha$ の複素線型部分空間のとき, 例えば $\mathfrak{v} = \mathbb{C}^k$ とすると, $(S_\mathfrak{v}).o$ は全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-k}$ である. ちなみにこの $(S_\mathfrak{v}).o = \mathbb{C}\mathrm{H}^{n-k}$ は鏡映部分多様体である.

(2) $\mathfrak{v}$ が 1 次元のとき, $(S_\mathfrak{v}).o$ は等質極小線織超曲面と呼ばれるものになっている. この場合には, 全ての $(S_\mathfrak{v})$-軌道の主曲率が完全に決定されている ([1]). その結果によると, $(S_\mathfrak{v}).o$ は austere であり, また $(S_\mathfrak{v}).o$ は $S_\mathfrak{v}$-軌道の中で唯一極小となるものである.

(3) $\mathfrak{v}$ が $\mathfrak{g}_\alpha$ の一定の Kähler 角度を持つ線型部分空間のとき, $(S_\mathfrak{v}).o$ は余等質性 1 作用の特異軌道と一致する (正確に言うと, $N_{K_0}(\mathfrak{v})S_\mathfrak{v}$ による作用が余等質性 1 で, その原点を通る軌道が $(S_\mathfrak{v}).o$ と一致する ([4])). 余等質性 1 作用の特異軌道は一般に弱鏡映である.

4 複素双曲空間内の Ricci soliton 超曲面

$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面には, Berndt ([1]) によって導入されたリー超曲面と呼ばれるクラスがある. この節では, Ricci soliton となるリー超曲面の分類を紹介する.

定義 4.1. リーマン多様体 (M, g) に対して, Ricci 作用素を Ric, ベクトル場 X によるリー微分を $\mathfrak{L}_X$ で表す. このとき, (M, g) が **<u>Ricci soliton</u>** であるとは, 次が成り立つこと: 定数 $c \in \mathbb{R}$ および完備ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して,

$$\mathrm{Ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g. \tag{4.1}$$

定義より, Ricci soliton は Einstein 多様体の一般化である. $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内に Einstein 超曲面は存在しないが, 一方で, ホロ球面が Ricci soliton であることは, Lauret の結果 ([9]) から容易に分かる. このことからも, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の Ricci soliton 超曲面は, 興味深い話題であると思われる.

定義 4.2. $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面のうち, S_0 および N の軌道を総称して **<u>リー超曲面</u>** と呼ぶ. ただしここで, S_0 は $\mathfrak{s}_0 := \mathfrak{s} \ominus \mathbb{R}X_1$ に対応する連結リー部分群.

ちなみに, S_0 の原点を通る軌道 $(S_0).o$ は等質極小線織超曲面, 他の軌道 $(S_0).p$ は $(S_0).o$ の等距離超曲面. また, N の軌道は全て互いに合同であり, これはホロ球面である.

定理 4.3 ([7]). $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内のリー超曲面 M が Ricci soliton であるための必要十分条件は, 以下のいずれかが成り立つこと:

(1) $n > 2$ のとき, M がホロ球面 $N.o$ と合同になること.

(2) $n = 2$ のとき, M が等質極小線織超曲面 $(S_0).o$ またはホロ球面 $N.o$ と合同になること.

注意 4.4. $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ および $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 内の Ricci soliton 超曲面に関しては, Cho & 木村 ([6]) の研究がある. 彼らの結果と上記の結果の関連について述べる.

(1) コンパクトな Hopf 超曲面は Ricci soliton ではない ([6, Theorem 1.2]). 一方で, ホロ球面は Ricci soliton だが, これは非コンパクトな Hopf 超曲面である.

(2) 線織超曲面は gradient Ricci soliton ではない ([6, Theorem 1.3]). 一方で, 等質極小線織超曲面 $(S_0).o$ は $n = 2$ のとき Ricci soliton だが, これは gradient ではない ([10]).

以下で, 定理 4.3 の証明の概略を述べる. 一言で言うと, 可解リー群上の左不変 Ricci soliton に関するリー代数レベルの議論に帰着させる. まずはリー代数側の用語の準備をする.

定義 4.5. 内積付き可解リー代数 $(\mathfrak{s}', \langle , \rangle)$ が **solvsoliton** (または **代数的 Ricci soliton**) であるとは, Ricci 作用素 Ric が次をみたすこと: 定数 $c \in \mathbb{R}$ と微分 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s}')$ が存在して,

$$\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = c \cdot \mathrm{id} + D. \tag{4.2}$$

ここで $\mathrm{Der}(\mathfrak{s}')$ は $\mathfrak{s}'$ の微分代数である. Lauret ([10]) は, 上記の solvsoliton を導入し, 可解リー群上の左不変 Ricci soliton を深く研究している. 次はその一部:

定理 4.6 ([10]). 内積付き可解リー代数 $(\mathfrak{s}', \langle , \rangle)$ に対して, $\mathfrak{s}'$ に対応する単連結可解リー群を S' とし, $\langle , \rangle$ に対応する左不変計量を g とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $(\mathfrak{s}', \langle , \rangle)$ が solvsoliton ならば (S', g) は Ricci soliton である,

(2) $\mathfrak{s}'$ が完全可解のとき, (S', g) が Ricci soliton ならば $(\mathfrak{s}', \langle , \rangle)$ は solvsoliton である.

ここで, 可解リー代数 $\mathfrak{s}'$ が **完全可解** とは, 次が成り立つこと: 任意の $X \in \mathfrak{s}'$ に対して, ad_X の固有値が全て実数. 次の補題により, リー超曲面が Ricci soliton であるかどうかは, 完全にリー代数レベルの問題となる.

補題 4.7. リー群 S_0 および N は単連結であり, リー超曲面は S_0 または N に然るべき左不変計量を入れた空間と等長的である. さらに, リー代数 $\mathfrak{s}_0$ および $\mathfrak{n}$ は完全可解である.

よって, リー代数 $\mathfrak{s}_0$ および $\mathfrak{n}$ に対して, リー超曲面として実現される内積を考えて, それらが solvsoliton であるかどうかを確認すれば, 定理 4.3 を証明することができる.

5 複素双曲平面への余等質性 2 作用

この節では, 複素双曲平面 $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用の分類について, 現在までに得られている結果を紹介する. ちなみに, 余等質性 2 作用の非特異軌道は, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ 内の等質な曲面である. 分類は, 以下で定義される軌道同値の下で行う.

定義 5.1. (M, g) をリーマン多様体とする. H, H' による M への等長的作用が **軌道同値** であるとは, 次が成り立つこと: 等長変換 $f \in \mathrm{Isom}(M, g)$ が存在して, f は全ての H-軌道を H'-軌道に移す, すなわち, 任意の $p \in M$ に対して, $f(H.p) = H'.(f(p))$.

分類結果を述べるために, $0 \neq T_0 \in \mathfrak{k}_0$ となる元 T_0 を一つ固定しておく. $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ の場合には,

$\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{u}(1)$ なので, 放物型部分リー代数 $\mathfrak{q}$ は次の基底を持つ:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathrm{span}\{T_0, A_0, X_1, Y_1, Z_0\}. \tag{5.1}$$

定理 5.2 ([11])**.** $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用は, 以下のリー代数から得られる作用のいずれかと軌道同値である:

(1) $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^2)$; 対応する作用は 0, 1, 2 次元の軌道を持つ.
(2) $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{span}\{T_0, A_0\}$; 対応する作用は 1, 2 次元の軌道を持つ.
(3) $\mathrm{span}\{T_0, Z_0\}$; 対応する作用は 1, 2 次元の軌道を持つ.
(4) $\mathrm{span}\{X_1, Z_0\}$; 対応する作用の軌道は全て 2 次元.
(5) $\mathrm{span}\{A_0, X_1\}$; 対応する作用の軌道は全て 2 次元.
(6) $\mathrm{span}\{A_0 + tT_0, Z_0\}$ (ただし $t \in \mathbb{R}$); 対応する作用の軌道は全て 2 次元.

注意 5.3. 上記の定理の (5), (6) の作用が, 互いに軌道同値でないことは, まだ確かめられていないので, その部分はまだ不完全である (特に (6) の作用は, $t \in \mathbb{R}$ の取り方によって連続的に存在するので, 軌道同値性の確認は面倒である). 軌道同値性を確かめるためには, それぞれの軌道の幾何を具体的に調べる必要がある. $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ 内の等質な曲面の幾何は, いずれにしても調べるべき対象であると考えている.

最後に, polar 作用の研究との関連を述べる.

定義 5.4. リーマン多様体 (M, g) への等長的作用が <u>**polar**</u> であるとは, 次が成り立つこと: 連結かつ完備な部分多様体 Σ が存在し, Σ は全ての軌道と交わり, かつ直交する.

非コンパクト型対称空間への polar 作用の分類は, 極めて難しいと思われる. 実際, Berndt & Díaz-Ramos ([2]) によって, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への polar 作用の分類が得られたのですら最近である.

定理 5.5 ([2])**.** $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への等長的作用が polar であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: 余等質性 1 作用であるか, 定理 5.2 の (1)–(4) の作用に軌道同値である.

定理 5.2 を使って, [2] の結果の別証明を与えることができる. 実際, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への polar 作用の余等質性は 1 または 2 であり, 余等質性 1 作用は分類済で全て polar であることが分かっているので, 上記の余等質性 2 作用の中でどれが polar であるかをチェックすれば良い.

参考文献

[1] Berndt, J.: Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.*, **229** (1998), 589–600.

[2] Berndt, J., Díaz-Ramos, J. C.: Polar actions on the complex hyperbolic plane, *Ann. Global Anal. Geom.*, to appear, arXiv:1108.0543v1.

[3] Berndt, J., Tamaru, H.: Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.*, **63** (2003), 1–40.
[4] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359** (2007), 3425–3438.
[5] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, *J. Reine Angew. Math.*, to appear.
[6] Cho, J. T., Kimura, M.: Ricci solitons of compact real hypersurfaces in Kähler manifolds, *Math. Nachricten*, **284** (2011), 1385–1393.
[7] Hashinaga, T., Kubo, A., Tamaru, H.: Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces, in preparation.
[8] Ikawa, O., Sakai, T., Tasaki, H.: Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **61** (2009), 437–481.
[9] Lauret, J.: Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.*, **319** (2001), 715–733.
[10] Lauret, J.: Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.*, **650** (2011), 1–21.
[11] Matsusaki, K.: 複素双曲平面への余等質性 2 作用, 広島大学大学院理学研究科修士論文, 2012 年 3 月.
[12] Tamaru, H.: 複素双曲空間内の等質超曲面の分類, in: 部分多様体論・湯沢 2007 報告集, 5–15.
[13] Tamaru, H.: Homogeneous submanifolds in noncompact symmetric spaces, in: *Proceedings of The Fourteenth International Workshop on Diff. Geom.* **14** (2010), 111–144.