非コンパクト対称空間への群作用とその応用*

田丸 博士† (広島大学大学院理学研究科)

概要

非コンパクト対称空間への群作用を用いて, リー群上の左不変計量の幾何を調べることができる. 本稿では, 非コンパクト対称空間への cohomogeneity one 作用に関する結果と, それを用いて得られるリー群上の左不変計量に関する結果を, 相互の関連を意識しつつ概観する.

1 導入

本稿の目的は, 非コンパクト対称空間への群作用の研究の最近の進展と, その研究のリー群上の左不変計量の幾何への応用について, 紹介することである.

前半では, 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用について, 現時点までに得られている結果を紹介する. リーマン多様体への等長的作用が **cohomogeneity one** であるとは, 最大次元の軌道が余次元 1 となることを言う. 作用が cohomogeneity one であることは, 軌道空間の次元が 1 であることと同値. このことから, cohomogeneity one 作用は, 群作用で不変な幾何構造を構成などに用いられること多い. また, 定義から明らかなように, cohomogeneity one 作用の最大次元の軌道 (非特異軌道) は, 等質超曲面となる. 従って, cohomogeneity one 作用の分類は, 等質超曲面の分類と本質的に同値である.

リー群上の左不変計量は, Einstein 計量や Ricci soliton 計量の具体例を供給するなど, 興味深い対象である. 本稿の後半では, 非コンパクト対称空間への群作用を応用して得られた, リー群上の左不変計量に関する結果を紹介する. 鍵となる観察は次の通り: 与えられた n 次元リー群に対して, その上の左不変計量の成す空間は, 自然に非コンパクト対称空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ と同一視され, また, 左不変計量の “moduli 空間” は, 上記の非コンパクト対称空間への然るべき群作用の軌道空間となる. このことから, 非コンパクト対称空間への群作用を用いて, 左不変計量の幾何 (たとえば左不変な Einstein 計量や Ricci soliton 計量の存在問題など) を研究することができる.

2 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用

本節では, 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用について, 現在までに得られている結果を紹介する. 本節の内容は, Berndt 氏との共同研究 ([1, 2, 3, 4]) に基づく.

* 第 59 回幾何学シンポジウム (九州大学, 2012/08/27–30) 講演予稿

† `tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`

2.1 主結果

ここでは, 非コンパクト型既約対称空間への cohomogeneity one 作用の「ラフな分類」の主張を述べる. 分類は, 次で定義される軌道同値という同値関係の下で行う.

定義 2.1. リーマン多様体への H, H' による等長的作用が <u>**軌道同値**</u> とは, 任意の H-軌道を H'-軌道に移す等長変換 f が存在すること. すなわち, $\forall p \in M$, $f(H.p) = H'.(f(p))$.

次の定理により, 非コンパクト型既約対称空間への cohomogeneity one 作用は, 大雑把に言って 4 つの型に分かれる.

定理 2.2 ([4]). 非コンパクト型既約対称空間 M への cohomogeneity one 作用は, 以下の作用のいずれかと軌道同値:

(1) 特異軌道を持たない cohomogeneity one 作用,
(2) 全測地的特異軌道を持つような cohomogeneity one 作用,
(3) nilpotent construction で得られる作用,
(4) canonical extension で得られる作用.

なお, (1) の作用は [1] で, (2) の作用は [2] で, それぞれ完全に分かっている. よって, (3), (4) の作用で得られるものを明示的に分類できれば, cohomogeneity one 作用が分類されることになる. しかし, 一部の特殊な場合を除いて, これらの分類は未完成である.

定理の中の (1), (3), (4) の作用について, 以降でもう少し詳しく説明する.

2.2 特異軌道を持たない場合

非コンパクト型既約対称空間 $M = G/K$ への cohomogeneity one 作用のうち, 特異軌道を持たないものは, 完全に分類されている. ここではその結果を紹介する.

リー代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, 岩澤分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ で表す. すなわち, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間であり, また冪零部分 $\mathfrak{n}$ は次で与えられる:

$$\mathfrak{n} := \bigoplus\nolimits_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{2.1}$$

ここで, 制限ルート系を $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, その単純ルート系を Λ としたとき, Λ に関する正ルート全体の集合が Δ^+ である. また $\mathfrak{g}_\alpha$ はルート空間を表す.

命題 2.3 ([1]). 任意の 1 次元線型部分空間 $\ell \subset \mathfrak{a}$ に対し, 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{s}_\ell := (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}$ は $\mathfrak{s}$ の部分リー代数 (ただし $\ominus$ は直交補空間を表す),
(2) 対応する S の連結リー部分群 S_ℓ の作用は, 特異軌道をもたない cohomogeneity one 作用.
(3) 全ての S_ξ-軌道は等長的に合同.

命題 2.4 ([1]). 任意の単純ルート $\alpha \in \Lambda$ および $0 \neq \xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対し, 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{s}_\xi := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}\xi)$ は $\mathfrak{s}$ の部分リー代数,

(2) 対応する S の連結リー部分群 S_ξ の作用は, 特異軌道をもたない cohomogeneity one 作用.

(3) 原点を通る軌道 $(S_\xi).o$ は唯一の極小軌道.

定理 2.5 ([1]). 非コンパクト型既約対称空間 M への H による cohmogeneity one 作用が, 特異軌道を持たないと仮定する. このとき, H の作用は, 命題 2.3, 2.4 で得られたいずれかの作用と軌道同値.

上記の作用の中には軌道同値になるものも含まれているが, その判定は完全にできている. 軌道同値を除いて数えると, 命題 2.3 から得られる作用は, $\mathrm{rank}(M) = 1$ の場合はひとつ, $\mathrm{rank}(M) > 1$ の場合は連続的に存在する. 命題 2.4 で得られる作用は有限個である.

2.3 新しい構成方法 1: nilpotent construction

ここでは, nilpotent construction という, 放物型部分代数の冪零部分を用いた cohogeneity one 作用の構成方法を紹介する. 鍵になるのは, 放物型部分代数の Chevalley 分解である. 放物型部分代数に関する準備を, 階別リー代数を用いて行う.

定義 2.6. リー代数 $\mathfrak{g}$ の直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **階別リー代数** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $[\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^q] \subset \mathfrak{g}^{p+q}$.

命題 2.7 ([11]). 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の階別リー代数は, 次によって分類される:

(1) $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とし, 真部分集合 $\Phi := \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\} \subsetneq \Lambda$ をとる. このとき, 次で定義される $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ は階別リー代数である:

$$\mathfrak{g}^k := \bigoplus_{c_{i_1} + \cdots + c_{i_k} = k} \mathfrak{g}_{c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r}. \tag{2.2}$$

(2) 任意の階別リー代数は, (1) の方法で “本質的に” 全て得られる.

定義 2.8. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{q}$ が **放物型** であるとは, 次をみたす階別リー代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が存在すること: $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$.

特に, $\Phi \subsetneq \Lambda$ から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_\Phi = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ で表す. このように, 階別リー代数を用いて放物型部分代数を定義する方法を採ると, 次の分解は明らか.

命題 2.9. 放物型部分代数 $\mathfrak{q}_\Phi$ に対して,

(1) $\mathfrak{l}_\Phi := \mathfrak{g}^0$ は簡約部分代数,

(2) $\mathfrak{n}_\Phi := \bigoplus_{k > 0} \mathfrak{g}^k$ は冪零部分代数,

(3) 次は直和分解: $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ (これを **Chevalley 分解** と呼ぶ).

部分空間 $\mathfrak{g}^k$ は Φ に依存するので, $\mathfrak{n}_\Phi^k$ と表すことにする．すなわち $\mathfrak{n}_\Phi = \bigoplus_{k>0} \mathfrak{n}_\Phi^k$. これを $\mathfrak{n}_\Phi$ の自然な次数付けと呼ぶ.

命題 2.10 ([4]). 放物型部分代数の Chevalley 分解を $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ とし, 冪零部分の自然な次数付けを $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_\Phi^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_\Phi^\nu$ とする．また, 部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{n}_\Phi^1$ に対して, $\mathfrak{n}_{\Phi,\mathfrak{v}} := \mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v}$ が以下をみたすと仮定する:

(i) $N_{L_\Phi}(\mathfrak{n}_{\Phi,\mathfrak{v}})$ は $(L_\Phi).o$ に推移的に作用する,

(ii) $N_{K_\Phi}(\mathfrak{n}_{\Phi,\mathfrak{v}})$ は $\mathfrak{v}$ の単位球に推移的に作用する.

このとき, $N_{L_\Phi}(\mathfrak{n}_{\Phi,\mathfrak{v}})N_{\Phi,\mathfrak{v}}$ の M への作用は cohomogeneity one である．また, このような構成方法を **nilpotent construction** と呼ぶ.

このとき, $\mathfrak{v}$ は原点における軌道の法空間に対応し, $N_{K_\Phi}(\mathfrak{n}_{\Phi,\mathfrak{v}})$ の $\mathfrak{v}$ への作用が slice 表現に対応する．特に, $\dim \mathfrak{v} \geq 2$ なら, 構成された cohomogeneity one 作用は特異軌道を持つ.

ここまでに述べた事項を使うと, 階数 1 の非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one 作用を分類するための鍵となる定理を説明することができる.

定理 2.11 ([3]). M が階数 1 のとき, M への cohomogeneity one 作用は, 以下の作用のいずれかと軌道同値:

(1) 特異軌道を持たない cohomogeneity one 作用 (ちょうど二つ存在),

(2) 全測地的な特異軌道を持つような cohomogeneity one 作用,

(3) nilpotent construction で得られる作用.

複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one 作用の分類は, nilpotent construction の条件をじっと眺めると, 次のような $\mathrm{U}(n-1)$ の $\mathbb{C}^{n-1}$ への自然な表現の問題に帰着される: (実) 部分空間 $\mathfrak{v} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ で, $N_{\mathrm{U}(n-1)}(\mathfrak{v})$ が $\mathfrak{v}$ 内の単位球に推移的に作用するものを分類せよ (ただし共役は除く)．この場合の答えは, $\mathfrak{v}$ の Kähler 角度が一定であること, である.

四元数双曲空間 $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one 作用の分類は, $\mathrm{Sp}(n-1) \times \mathrm{Sp}(1)$ の $\mathbb{H}^{n-1}$ への自然な表現の問題に帰着される．この場合には, 表現論の問題に帰着させることができたが, その問題が解けないために, cohomogeneity one 作用の分類は未完成である．なお, [3] には, その時点で分かっていた $\mathfrak{v}$ のリストがあるが, その後に [6] において新しい例が構成されている.

同様に, 階数が高い場合の nilpotent construction も, 必要な仮定をみたす部分空間の分類は困難な場合が多い.

2.4 新しい構成方法 2: canonical extension

ここでは, canonical extension という, 放物型部分代数の簡約部分を用いた cohogeneity one 作用の構成方法を紹介する．鍵になるのは, 放物型部分代数の Langlands 分解である.

命題 2.12. 放物型部分代数 $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ に対して,

(1) $\mathfrak{a}_\Phi := Z(\mathfrak{l}_\Phi) \cap \mathfrak{a}$ は可換部分代数,
(2) $\mathfrak{m}_\Phi := \mathfrak{l}_\Phi \ominus \mathfrak{a}_\Phi$ は簡約部分代数,
(3) $\mathfrak{s}_\Phi := \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ は可解部分代数,
(4) 次は直和分解: $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ (これを **Langlands 分解** と呼ぶ).
(5) $(M_\Phi).o$ は M 内の全測地的部分多様体であり, 次をみたす: $\mathrm{rank}((M_\Phi).o) < \mathrm{rank}(M)$.

ちなみに $(M_\Phi).o$ は非コンパクト型対称空間であり, その単純ルート系は Φ に一致する.

命題 2.13 ([4]). 放物型部分代数の Langlands 分解 $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ を考え, H が $(M_\Phi).o$ に cohomogeneity one で作用していると仮定する. このとき, HS_Φ の M への作用も cohomogeneity one である (これを **canonical extension** と呼ぶ).

ちなみに, $\mathrm{rank}(M) = 1$ の場合には $(M_\Phi).o = \{o\}$ となるので, この場合には canonical extension は何も生み出さない.

階数が高い場合には, canonical extension によって, 数多くの cohomogeneity one 作用が構成される. 特に, 分類問題に対して, 階数に関する帰納法が適用できる (可能性がある). しかし, 階数 1 だとしても, $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ への cohomogeneity one 作用の分類は未解決である. また, $(M_\Phi).o$ は既約とは限らないので, canonical extension で構成される cohomogeneity one 作用を調べるためには, 既約でない対称空間への cohomogeneity one 作用を研究する必要がある.

3 左不変計量のモジュライ空間と Milnor 型定理

リー群 G が n 次元であるとすると, その上の左不変計量全体の成す空間は,

$$\widetilde{\mathfrak{M}} := \{G \text{ 上の左不変計量 }\} = \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積 }\} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \tag{3.1}$$

となり, 自然に非コンパクト対称空間となる. 本節では, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への群作用の研究が, リー群上の左不変 Einstein 計量や Ricci soliton 計量の存在非存在問題に応用できることを述べる. 具体的には, 3 次元単連結 unimodular リー群に関する Milnor の結果 ([16]), 所謂 "Milnor frame" の高次元版を得るための手続きを紹介する.

3.1 Milnor の定理

まずここでは, 3 次元単連結 unimodular リー群に関する Milnor の結果 ([16]) を復習する. なお, リー代数 $\mathfrak{g}$ が **unimodular** とは, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ となることである.

定理 3.1 (Milnor [16]). 3 次元 unimodular リー代数を $\mathfrak{g}$ とし, $\langle , \rangle$ を $\mathfrak{g}$ 上の任意の内積とする. このとき, 内積 $\langle , \rangle$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 $\{x_1, x_2, x_3\}$ で次を満たすものが存在する:

$$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3, \quad [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1, \quad [x_3, x_1] = \lambda_2 x_2.$$

注意 3.2. Milnor の定理の応用として, 次が挙げられる:

(1) 例えば, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ および H^3 が左不変 Einstein 計量を許容しないことが示される. 実際, 各 3 次元 unimodular リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の取り得る値は完全に確定されている. 例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の場合には, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, -)$, また $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^3$ (Heisenberg 代数) の場合には, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, 0)$ となる正規直交基底が存在する. このような正規直交基底を用いて Ricci 曲率を計算すれば, 左不変 Einstein 計量の非存在が確かめられる.

(2) また, 上記の正規直交基底を左不変な frame だと思って, Ricci flow の解を具体的に記述することができる. 例えば [5] を参照.

Milnor の定理の証明は $\dim \mathfrak{g} = 3$ に強く依存していた. これを高次元の場合に拡張するための鍵となるのが, 次のような観察である.

注意 3.3. Milnor の定理は, 各 3 次元 unimodular リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積の "moduli 空間" を記述していると考えることができる.

(1) 定理より, $\mathfrak{g}$ 上の内積全てを表すために必要なパラメータは, 高々 3 個である.

(2) 一方で, 本節の冒頭で述べたように, $\mathfrak{g}$ 上の内積全体の空間は $\widetilde{\mathfrak{M}} \cong \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ となるので, 8 次元である.

(3) この差は, 次から来ている: リー代数の正規直交基底の言葉で表現することにより, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用で移り合うものは同じとみなしている.

(4) すなわち, Milnor の定理が記述しているものは, 内積全体の空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ を $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用で割った空間である.

よって, 与えられた任意のリー代数に対して, その左不変計量の moduli 空間を記述することができれば, そこから逆算して Milnor の定理の一般化を得ることができる. これを以降で述べる.

3.2 左不変計量の moduli 空間

ここでは, 与えられたリー群に対して, その上の左不変計量の moduli 空間を定義し, その明示的な表示を得るための方法を紹介する.

定義 3.4. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次のように定義する:

(1) リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle,\rangle_1$ と $\langle,\rangle_2$ が **スカラー倍を除いて等長的** とは, 次が成り立つこと: $c > 0$ および $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が存在して, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 = c\langle\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle_2$.

(2) スカラー倍を除いて等長的と言う同値関係による $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の商集合を $\mathfrak{PM}$ で表す:

$$\mathfrak{PM} := \widetilde{\mathfrak{M}}/\text{スカラー倍を除いて等長的}. \tag{3.2}$$

注意 3.5. 上の同値関係および商集合 $\mathfrak{PM}$ について, 次に注意する:

(1) 内積 $\langle,\rangle_1$ と $\langle,\rangle_2$ がスカラー倍を除いて等長的ならば, 対応する単連結リー群に左不変計量を入れた空間 $(G, \langle,\rangle_1)$ と $(G, \langle,\rangle_2)$ は, リーマン多様体としてスカラー倍を除いて等長的である.

(2) よって, 対応する左不変計量が Einstein あるいは Ricci soliton であるという性質は, 上記の同値関係で不変である.

(3) 従って, これらのような計量の存在・非存在を調べるためには, $\mathfrak{PM}$ を調べれば十分である.

この $\mathfrak{PM}$ の表示を得るためには, 次の群が必要となる:

$$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid c \in \mathbb{R}^\times,\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}. \tag{3.3}$$

定理 3.6 ([13]). リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) 各 $\langle , \rangle$ の同値類 $[\langle , \rangle]$ は, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ による軌道である.

(2) よって $\mathfrak{PM}$ は, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ による $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への作用の軌道空間と同一視できる.

等質空間への群作用の軌道空間に関する一般論から, $\mathfrak{g}$ の次元を n とすると,

$$\mathfrak{PM} = \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \widetilde{\mathfrak{M}} = \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{O}(n) \tag{3.4}$$

という両側剰余類としての表示を得る. これを用いると $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示を得ることができる. 群作用が "良い" 場合には, $\mathfrak{PM}$ も良い表示を持つことが期待される.

例 3.7. 基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (ただし $n \geq 3$) をもち, 括弧積の関係式が次で定義されるリー代数を $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ で表す: $[e_1, e_2] = e_2$. このとき次が成り立つ:

$$\mathfrak{PM} = \{[g_\lambda . \langle , \rangle] \mid g_\lambda = I_n - \lambda E_{2,n},\ \lambda \geq 0\}. \tag{3.5}$$

ちなみにこの例では, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への作用は, 命題 2.10 で構成された cohomogeneity one 作用と一致する. よって, $\mathfrak{PM}$ の表示は, その軌道空間の表示に他ならない.

このような場合には非常に物事が上手く行くが, 一方で, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が小さいリー代数に対しては, $\mathfrak{PM}$ の良い表示は期待できない.

3.3 Milnor 型定理

ここでは, 左不変計量の moduli 空間 $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示が, Milnor の定理の一般化を与えることを紹介する. 鍵となるのは次の補題.

補題 3.8 ([9]). リー代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ が n 次元であるとし, その $\mathfrak{PM}$ の表示が与えられているとする. すなわち, 上記の基底を正規直交にする内積 $\langle , \rangle_0$ と $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が

$$\mathfrak{PM} = \{[g.\langle , \rangle] \mid g \in U\} \tag{3.6}$$

をみたすとする. このとき, $\mathfrak{g}$ 上の任意の内積 $\langle , \rangle$ に対して, 以下の (i), (ii) をみたす $g_0 \in U$, $k > 0$, $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在する:

(i) $\{F(e_1), \ldots, F(e_n)\}$ は $k\langle , \rangle$ に関する正規直交基底,

(ii) $[F(e_i), F(e_j)] = F(g_0^{-1}[g_0(e_i), g_0(e_j)])$ $(\forall i, j)$.

これを用いて得られる Milnor 型定理の具体例を一つだけ紹介する.

命題 3.9 ([9]). リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ を考える. このとき, $\mathfrak{g}$ 上の任意の内積 $\langle, \rangle$ に対して, 次をみたす $k > 0$, $\lambda \geq 0$ および $k\langle, \rangle$ に関する正規直交基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ が存在し, 括弧積の関係式は次で与えられる:

$$[x_1, x_2] = x_2 + \lambda x_n. \tag{3.7}$$

系 3.10. リー代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^2} \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ 上の任意の内積 $\langle, \rangle$ に対して, その Ricci 作用素 $\mathrm{Ric}_{\langle, \rangle}$ の負・零・正の固有値の個数は $(-, 0, +) = (2, n-2, 0)$ または $(2, n-3, 1)$ である. 特に, $\mathfrak{g}$ に対応する単連結リー群は, 左不変 Einstein 計量を許容しない.

ちなみに左不変 Ricci soliton 計量は許容する. Ricci 作用素の符号が $(-, 0, +) = (2, n-2, 0)$ に対応するものが Ricci soliton である.

4 代数的 Ricci soliton と対応する部分多様体

リー代数上の各内積 $\langle, \rangle$ に対して, 定理 3.6 より, スカラー倍を除いて等長的という同値関係による同値類は $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道と一致していた:

$$[\langle, \rangle] = (\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})).\langle, \rangle \subset \widetilde{\mathfrak{M}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n). \tag{4.1}$$

このときの $[\langle, \rangle]$ を $\langle, \rangle$ に **対応する部分多様体** と呼ぶ. 内積に対応する左不変計量が Einstein あるいは Ricci soliton であるという性質は, スカラー倍を除いて等長的と言う同値関係で不変なので (注意 3.5), これらは対応する部分多様体の性質と見なすことができる. そこで本節では, 次の問題を考え, 3 次元の場合に得た結果を紹介する:

問題 4.1. 左不変計量の幾何的な性質を, 対応する部分多様体の性質で特徴付けよ.

4.1 3 次元可解リー代数に対応する群作用

ここでは $\mathfrak{g}$ を 3 次元可解リー代数とし, これの $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用に関する結果を述べる. それぞれの 3 次元可解リー代数は, 以下の分類表の記号を用いて表す:

Name	Nonzero bracket relations	Condition	
$\mathfrak{h}_3$	$[e_1, e_2] = e_3$		Nilpotent
$\mathfrak{r}_3$	$[e_1, e_2] = e_2 + e_3,\ [e_1, e_3] = e_3$		Solvable
$\mathfrak{r}_{3,a}$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = ae_3$	$-1 \leq a \leq 1$	Solvable
$\mathfrak{r}'_{3,a}$	$[e_1, e_2] = ae_2 - e_3,\ [e_1, e_3] = e_2 + ae_3$	$0 \leq a$	Solvable

表 1 Three-dimensional solvable Lie algebras

命題 4.2 ([8]). 全ての 3 次元可解リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ への作用の cohomogeneity は高々 1 である．さらに, 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3, \mathfrak{r}_{3,1}$ のとき, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への作用は推移的.

(2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_3$ のとき, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への作用は, 命題 2.3 で構成された作用と一致する．特に, この作用は特異軌道を持たない作用であり, 全ての軌道が合同, かつ極小軌道は存在しない.

(3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_{3,a}$ $(-1 \leq a < 1)$ のとき, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への作用は, 命題 2.4 で構成された作用と一致する．特に, この作用は特異軌道を持たない作用であり, かつ極小軌道を唯一つ持つ.

(4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}'_{3,a}$ $(a \geq 0)$ のとき, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ への作用は, canonical extension (命題 2.13) で構成された作用と一致する．特に, この作用は余次元 2 の特異軌道を持つ作用であり, この特異軌道は唯一の極小軌道である.

まとめると, 極小軌道を唯一持つ作用 (推移的なものも含む) と, 極小軌道を持たない作用の 2 つに分けられる．この極小軌道に対応する内積 $\langle , \rangle$ が, 良い計量になっていることを次で述べる.

4.2 代数的 Ricci soliton

上で述べた良い計量は, 実は代数的 Ricci soliton と呼ばれるものになる．ここでは, 代数的 Ricci soliton について簡単に復習した後に, この節の主結果を述べる.

定義 4.3. 内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が <u>**代数的 Ricci soliton**</u> であるとは, Ricci 作用素 Ric が次をみたすこと: 定数 $c \in \mathbb{R}$ と微分 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して,

$$\mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = c \cdot \mathrm{id} + D. \tag{4.2}$$

定義より, 左不変 Einstein 計量は代数的 Ricci soliton である．また, 代数的 Ricci soliton は, 通常の Ricci soliton の文字通り “代数版” である.

注意 4.4. 単連結リー群 G に左不変計量 g を入れた空間 (G, g) を考え, 対応する内積付きリー代数を $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ で表す．このとき,

(1) もし $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が代数的 Ricci soliton ならば, (G, g) は Ricci soliton である ([15, 10]).

(2) 逆は一般には成り立たないが, $\mathfrak{g}$ が冪零あるいは完全可解ならば成立する ([14, 15]).

(3) また, $\mathfrak{g}$ が可解のとき, 次の意味でなら逆が成り立つ: (G, g) が Ricci soliton ならば, 代数的 Ricci soliton とリーマン多様体として等長的である ([10]).

(4) さらに, $\mathfrak{g}$ が可解のとき, スカラー倍と等長的を除くと, その上の代数的 Ricci soliton は高々 1 つである ([14, 15]).

各 3 次元可解リー代数 $\mathfrak{g}$ に対しては, その上の代数的 Ricci soliton の分類が知られている ([15])．また, §3 の Milnor 型定理を用いることでも, 代数的 Ricci soliton の分類は可能である．その結果と命題 4.2 を合わせることで, 次が得られる.

定理 4.5 ([8]). リー代数 $\mathfrak{g}$ が 3 次元可解であるとする．このとき, $\mathfrak{g}$ 上の内積が代数的 Ricci soliton であるための必要十分条件は, 対応する部分多様体 $[\langle , \rangle]$ が極小部分多様体となること．

参考文献

[1] Berndt, J., Tamaru, H.: Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.*, **63** (2003), 1–40.

[2] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, *Tohoku Math. J.*, **56** (2004), 163–177.

[3] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359** (2007), 3425–3438.

[4] Berndt, J., Tamaru, H.: Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, *J. Reine Angew. Math.*, to appear.

[5] Chow, B., Knopf, D.: *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, **110**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[6] Díaz-Ramos, J. C., Domínguez-Vázquez, M.: Isoparametric hypersurfaces in Damek-Ricci spaces, preptint, arXiv:1111.0264.

[7] Eberlein, P. B.: *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1996.

[8] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, in preparation.

[9] Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, preprint (April 2012).

[10] Jablonski, M.: Homogeneous Ricci solitons, preprint, arXiv:1109.6556.

[11] Kaneyuki, S., Asano, H.: Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems, *Nagoya Math. J.*, **112** (1988), 81–115.

[12] Knapp, A. W.: *Lie groups beyond an introduction, second edition*, Birkhäuser, Boston, 2005.

[13] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.*, **135** (2011), 229–243.

[14] Lauret, J.: Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.*, **319** (2001), 715–733.

[15] Lauret, J.: Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.*, **650** (2011), 1–21.

[16] Milnor, J.: Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Math.* **21** (1976), no. 3, 293–329.

[17] Tamaru, H.: Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, *Math. Ann.*, **351** (2011), 51–66.