

第 1 章

カンドル代数の基礎

カンドル代数の定義, 基本的概念, 具体例を紹介する.

1.1 カンドル代数の定義

以下, 特に断らない限り X を集合とする.

1.1.1 定義

定義 1.1 X と二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が カンドル (quandle) であるとは, 以下が成り立つこと:

- (Q1) $\forall x \in X, x * x = x,$
- (Q2) $\forall x, y \in X, \exists! z \in X : z * y = x,$
- (Q3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$

集合 X から X への写像全体の成す集合を $\text{Map}(X, X)$ で表す.

命題 1.2 写像 $s : X \rightarrow \text{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考え, $x * y := s_y(x)$ と定める. このとき, $(X, *)$ がカンドルになるための必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

- (S1) $\forall x \in X, s_x(x) = x,$
- (S2) $\forall x \in X, s_x$ は全単射,
- (S3) $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x.$

上の条件をみたす s を カンドル構造 と呼ぶ. 以下では (X, s) でカンドルを表す.

1.1.2 由来

以下のように, カンドルは, 点対称 (対称空間論), 群論, 結び目理論と深い関係がある.

例 1.3 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, 次で定義される s はカンドル構造である:

$$s_x(y) := 2x - y.$$

例 1.4 (共役カンドル) 群 G に対して, 次で定義される s はカンドル構造である:

$$s_x(y) := x^{-1}yx.$$

命題 1.5 有向結び目の図式のカンドル彩色は, ライデマイスター変形で不変である.

1.2 カンドル代数の基本的概念

1.2.1 準同型と同型

定義 1.6 $(X, s^X), (Y, s^Y)$ をカンドルとする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が 準同型 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X, f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$.

準同型の条件は, 二項演算 $*$ を保つという条件と同値である.

命題 1.7 準同型写像と準同型写像の合成は準同型である. また, 準同型写像が全単射の場合には, 逆写像も準同型である.

全単射な準同型写像を 同型写像 と呼ぶ. 二つのカンドルの間に同型写像が存在するとき, それらは 同型 であると言う. 上の命題から, 次が群になることが従う.

定義 1.8 カンドル (X, s) に対して, 次を 自己同型群 と呼ぶ.

$$\text{Aut}(X, s) := \{f: X \rightarrow X : \text{同型写像}\}.$$

1.2.2 内部自己同型

命題 1.9 任意の $x \in X$ に対して, 次が成り立つ: $s_x \in \text{Aut}(X, s)$.

定義 1.10 集合 $\{s_x \mid x \in X\}$ で生成される $\text{Aut}(X, s)$ の部分群を 内部自己同型群 と呼ぶ, $\text{Inn}(X, s)$ で表す.

内部自己同型群と自己同型群は, 一般には異なる.

定義 1.11 カンドル (X, s) に対して,

- (1) 等質 とは, 自己同型群 $\text{Aut}(X, s)$ が X に推移的に作用すること,
- (2) 代数的連結 とは, 内部自己同型群 $\text{Inn}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

代数的連結のことを, 単に連結と呼ぶ場合が多い. 定義より明らかに, 連結ならば等質である. 逆は必ずしも成り立たない.

1.3 カンドル代数の構成法

1.3.1 部分カンドル

定義 1.12 カンドル (X, s) に対して, 部分集合 $M \subset X$ が 部分カンドル であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in M, s_x(M) \subset M, s_x^{-1}(M) \subset M$.

命題 1.13 部分カンドルはカンドルである.

命題 1.14 カンドル (X, s) に対して, 内部自己同型群 $\text{Inn}(X, s)$ による軌道は部分カンドルである.

1.3.2 双対カンドル

命題 1.15 (X, s) をカンドルとし, $m \in \mathbb{Z}$ をとる. このとき, X において, 次で定義される s^m はカンドル構造である:

$$(s^m)_x := (s_x)^m.$$

定義 1.16 特に (X, s^{-1}) を (X, s) の 双対カンドル (dual quandle) と呼ぶ.

1.4 カンドル代数の例

1.4.1 自明カンドル

定義 1.17 任意の集合 X に対し, $s_x = \text{id}$ ($\forall x \in X$) によってカンドル構造を定めたものを 自明カンドル と呼ぶ.

命題 1.18 自明カンドル (X, s) に対し, 自己同型群 $\text{Aut}(X, s)$ は X 上の全単射全体の成す群, 内部自己同型群は単位元のみからなる群.

1.4.2 二面体カンドル

例 1.19 単位円 S^1 に通常の折り返しによって s を定めたものはカンドルである. ここで通常の折り返しは, 次で与えられる:

$$s_x(y) := 2\langle x, y \rangle x - y.$$

定義 1.20 単位円 S^1 の n 等分点の成す集合に, カンドル構造を上記の折り返しで定めたものを 二面体カンドル (dihedral quandle) と呼び, R_n で表す.

ちなみに R_n は S^1 の部分カンドルである.

命題 1.21 二面体カンドル R_n は, 集合 $X := \{0, 1, \dots, n-1\}$ に次でカンドル構造を定めたものと同型:

$$s_i(j) := 2i - j \pmod{n}.$$

命題 1.22 二面体カンドル R_n は等質である. また, R_n が連結であるための必要十分条件は, n が奇数であること.

1.4.3 正四面体カンドル

定義 1.23 正四面体の頂点の集合を X とし, x を上から見て対応する底面で左向きに 120° 回転させる写像を s_x とする. これにより得られるカンドルを 正四面体カンドル と呼ぶ.

これがカンドルの条件をみたすことは, 直接計算で確かめられる. ちなみに S^2 が 3-対称空間の構造を持つことと関係する.

命題 1.24 正四面体カンドルは連結である.

1.4.4 アレキサンダーカンドル

例 1.25 $\Lambda_n := \mathbb{Z}_n[t^{\pm 1}]$ を $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上のローラン多項式環とする. このとき, 次によりカンドル構造が定まる:

$$s_x(y) := (1-t)x + ty.$$

定義 1.26 J を Λ_n のイデアルとする. このとき商環 Λ_n/J には, 上のカンドル構造から誘導されたカンドル構造が入る. これを アレキサンダーカンドル と呼ぶ.

例 1.27 多項式 $t - 1$ で生成されるイデアル $J := (t - 1)$ を考える. このとき, Λ_n/J は自明カンドル.

例 1.28 $\Lambda_n/(t + 1)$ は二面体カンドル R_n と同型.

例 1.29 $\Lambda_2/(t^2 + t + 1)$ は正四面体カンドルと同型.

第 2 章

等質カンドルの構造

等質なカンドルが, 然るべき条件をみたす群と部分群の組と対応することを紹介する.

2.1 等質な集合

群作用および推移的な作用の定義は既知とする. 群 G の集合 M への作用を, 次の記号で表す:

$$\Phi : G \times M \rightarrow M : (g, p) \mapsto g.p. \quad (2.1)$$

定義 2.1 G を群とし, K をその部分群とする.

- (1) G 上の K による同値関係 を次で定義する: $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$.
- (2) この同値関係による商集合を K による剰余集合 と呼び, G/K で表す.

集合 M が群 G に関して等質とは, G の M への推移的な作用が存在することを言う. 次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 2.2 集合 M が G に関して等質であることと, $M = G/K$ と書けることは同値である.

この定理を証明するためには, 以下の二つの命題を示せば良い.

命題 2.3 K を G の任意の部分群とする. このとき, G/K は G に関して等質である. 特に, 次により G は G/K に推移的に作用する: $g.[h] := [gh]$.

命題 2.4 M が G に関して等質であるとし, $p \in M$ とする. このとき, 次の写像は全単射である: $G/G_p \rightarrow M : [g] \mapsto g.p$.

2.2 カンドル組

定義 2.5 G を群, K を G の部分群とし, $\sigma \in \text{Aut}(G)$ とする. このとき, 以下の条件をみたす (G, K, σ) を **カンドル組** と呼ぶ: $K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$.

次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 2.6 等質なカンドルは, カンドル組と対応する.

この定理の正確な主張は, 以下の命題に分けて述べる.

命題 2.7 (X, s) を等質なカンドルとする. このとき, 以下で与えられる (G, K, σ) はカンドル組である:

$$G := \text{Aut}(X, s), \quad p \in X, \quad K := G_p, \quad \sigma : G \rightarrow G : g \mapsto s_p \circ g \circ s_p^{-1}.$$

命題 2.8 (G, K, σ) をカンドル組とする. このとき, 次により G/K 上のカンドル構造が与えられる:

$$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)].$$

命題 2.9 (G, K, σ) をカンドル組とする. このとき, 上で定義したカンドル構造 s に関して, $(G/K, s)$ は等質である. 特に, 次が成り立つ:

$$G \subset \text{Aut}(G/K, s).$$

系 2.10 リーマン対称空間, リーマン k -対称空間, アフィン対称空間などは, 全てカンドルである.

2.3 例

例 2.11 任意の (G, K) に対して, $\sigma = \text{id}$ とすると, (G, K, σ) はカンドル組である. これから得られるカンドルは, 自明カンドル.

例 2.12 次の σ で与えられるカンドル組 $(\text{SO}(2), \{I_2\}, \sigma)$ から得られるカンドルは, 単位円 S^1 と同型である:

$$\sigma(g) := I_{1,1}gI_{1,1}, \quad I_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

例 2.13 上と同じ σ で与えられるカンドル組 $(\text{O}(2), \{I_2, I_{1,1}\}, \sigma)$ から得られるカンドルも, 単位円 S^1 と同型.

例 2.14 上と同じ σ を使って, 二面体カンドルを構成するカンドル組も得られる.

例 2.15 各 $a \in \mathbb{Z}$ に対し, 次の σ で与えられるカンドル組 $(\mathbb{Z}_n, \{e\}, \sigma)$ から得られるカンドルは, アレキサンダーカンドル $\Lambda_n/(t-a)$ と同型:

$$\sigma([n]) := [an].$$

このことから, 一つの (G, K) に対して, カンドル組になるような σ の取り方は数多くあることが分かる.

第 3 章

二点等質カンドル

二点等質カンドルの定義と、元の個数が素数であるような二点等質カンドルの分類を紹介する。ちなみに、二点等質は two-point homogeneous の直訳。

3.1 背景

まずはリーマン多様体 (M, g) に関する二点等質の概念を復習する。リーマン計量 g から決まる距離を d で表す。

定義 3.1 リーマン多様体 (M, g) が 二点等質 であるとは、次が成り立つこと: $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$ ($d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$), $\exists f \in \text{Isom}(M, g) : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

例 3.2 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, 球面 S^n に標準的なリーマン計量を入れた空間は、二点等質。トーラスは二点等質でない。

これを踏まえて、二点等質カンドルを定義する。

定義 3.3 カンドル (X, s) が 二点等質 であるとは、次が成り立つこと: $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$), $\exists f \in \text{Inn}(X, s) : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

二点等質の定義において、 $\text{Inn}(X, s)$ の代わりに $\text{Aut}(X, s)$ を使うことも考えられる。その場合には条件が緩くなる。例えば、自明カンドルは $\text{Aut}(X, s)$ に関しては二点等質である。

3.2 例

例 3.4 二面体カンドル R_n (ただし $n \geq 3$) が二点等質であるための必要十分条件は, $n = 3$ となること.

例 3.5 正四面体カンドルは二点等質.

3.3 性質

以下では, カンドル (X, s) は $\#X \geq 3$ をみたすものとし, $G := \text{Inn}(X, s)$, また G_p を $p \in X$ での固定部分群とする.

命題 3.6 (X, s) が二点等質であるための必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

- (i) (X, s) は連結,
- (ii) $\exists p \in X : G_p$ の $X \setminus \{p\}$ への作用は推移的.

定義 3.7 (X, s) が巡回型 とは, 以下が成り立つこと:

- (i) (X, s) は連結,
- (ii) $\exists p \in X : \langle s_p \rangle$ の $X \setminus \{p\}$ への作用は推移的.

ここで $\langle s_p \rangle$ は s_p で生成される G の部分群. このとき $\langle s_p \rangle \subset G_p$ に注意.

命題 3.8 巡回型カンドルは二点等質である.

例 3.9 二面体カンドル R_3 および正四面体カンドルは, 巡回型である.

3.4 主結果

主結果を述べるためには, アレキサンダーカンドル Λ_n/J が必要である. ここで $\Lambda_n = \mathbb{Z}_n[t^{\pm 1}]$ はローラン多項式環, J は Λ_n のイデアルであり, カンドル構造は以下で定められていた:

$$s_{[x]}([y]) = [(1-t)x + ty]. \quad (3.1)$$

命題 3.10 アレキサンダーカンドル $X := \Lambda_n/(t-a)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\langle s_{[0]} \rangle \cdot ([1]) = \{[1], [a], [a^2], [a^3], \dots\}.$$

例 3.11 $X := \Lambda_5/(t - a)$ を考える. このとき, $a = 2$ なら X は巡回型, $a = 4$ なら巡回型でない.

定義 3.12 p を素数, a を $1 < a < p$ をみたす自然数とする. a が p の原始根 であるとは, 次が成り立つこと:

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\} = \{[a], [a^2], [a^3], \dots\}.$$

定理 3.13 (X, s) をカンドルとし, $\#X = p$ (≥ 3) は素数であるとする. このとき, 以下は互いに同値:

- (1) (X, s) は二点等質.
- (2) p の原始根 a が存在して, (X, s) は $\Lambda_p/(t - a)$ と同型.
- (3) (X, s) は巡回型.

この定理を基にして, その続きに相当する結果がいくつか得られている. それらについては, この原稿を update する機会があれば, 追加するかも知れない.