等質空間の幾何学[*1]

田丸 博士[*2] (広島大学 大学院理学研究科)

2015/12/13[*3]

[*1] 本稿は, 2015 年度に大阪大学で行った集中講義の講義ノート (レジメ) です. ちなみに, 2012 年度に筑波大学で行った集中講義の講義ノートの一部でもあります (そちらの講義ノートは, 余裕がなくて TeX 化していなかったので, 未公開でした).

[*2] tamaru(あっと)math.sci.hiroshima-u.ac.jp

[*3] 本稿は, まだ第三者の目を通っていない Version 1.1 です. 句読点の半角全角が統一されていないのは, 大人の事情によるものです.

第 1 章

等質な集合

等質な集合を, 推移的な群作用をもつ集合として定義する. この章では, 集合 M が等質であることと, $M = G/K$ と書けることが同値になることを示す. また, 後に登場するものも含めて, 様々な等質空間の例を紹介する.

1.1 準備

直交群の性質など, 線型代数の準備をしておく.

定義 1.1 $M(n,\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列全体の集合とし, 以下のように定義する:

(1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群** と呼ぶ.
(2) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ を **特殊線型群** と呼ぶ.

以下では $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また, 単位行列を I_n で表し, 次のようにおく:

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

定義 1.2 上記の記号の下で, 以下のように定義する:

(1) $\mathrm{O}(p,q) := \{g \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^t g I_{p,q} g = I_{p,q}\}$ を **(不定値) 直交群** と呼ぶ.
(2) $\mathrm{SO}(p,q) := \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(p,q)$ を **(不定値) 特殊直交群** と呼ぶ.

通常の直交群は $\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n,0)$, 特殊直交群は $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SO}(n,0)$. また, 不定値直交群は, $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の (不定値) 内積 $\langle x, y\rangle_{p,q} := {}^t x I_{p,q} y$ と関係する.

命題 1.3 各 $g \in M(p+q,\mathbb{R})$ に対して，以下は同値：

(i) $g \in \mathrm{O}(p,q)$.
(ii) g は $\langle , \rangle_{p,q}$ を保つ．すなわち，$\forall v, w \in \mathbb{R}^{p+q}$，$\langle gv, gw\rangle_{p,q} = \langle v, w\rangle_{p,q}$.

(iii)　$g = (v_1, \dots, v_{p+q})$ と表すと，$\{v_1, \dots, v_{p+q}\}$ は $\mathbb{R}^{p+q}$ の (p,q)-正規直交基底.

1.2　群作用

群作用の定義と例を紹介する.

定義 1.4　写像 $\Phi : G \times M \to M$ に対して, $g.p := \Phi(g,p)$ と表す. 写像 Φ が G の M への **群作用** であるとは, 以下が成り立つこと:

(i)　任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して，$(gh).p = g.(h.p)$.

(ii)　任意の $p \in M$ に対して，$e.p = p$.

群 G が集合 M に作用することを，記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

命題 1.5　$\Phi : G \times M \to M$ により G が M に作用しているとする. このとき，

(1)　任意の部分群 $G' \subset G$ は，制限写像 $\Phi|_{G' \times M}$ によって M に作用する.

(2)　部分集合 $M' \subset M$ が G によって保たれている（すなわち $G.M' \subset M'$）とする. このとき，制限写像 $\Phi|_{G \times M'} : G \times M' \to M'$ によって，G は M' に作用する.

以下で群作用の具体例を紹介する. まずは $\langle , \rangle := \langle , \rangle_{n,0}$ を用いたものから始める.

例 1.6　以下は群作用である：

(1)　$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, v) \mapsto gv$.

(2)　作用する群を制限することにより，$\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.

(3)　作用される集合を制限することにより，$\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$.

例 1.7　上と同様に, $\mathrm{O}(p+1, q) \curvearrowright M(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid \langle x, x \rangle_{p+1,q} = 1\}$. ここで $M(n,0)$ は球面, $M(0,n)$ は実双曲空間である. また $M(p,1)$ はド・ジッター空間, $M(1,q)$ は反ド・ジッター空間と呼ばれる.

例 1.8　$G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は k 次元線型部分空間$\}$ を **実グラスマン多様体** と呼ぶ. 次は群作用 : $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n) : (g, V) \mapsto g.V := \{gv \mid v \in V\}$.

例 1.9（問題 (標準)）　$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を **上半平面** と呼ぶ. このとき，次によって $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ (ここで $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ でないことに注意):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

1.3　推移的な作用

群作用が推移的であることの定義を述べ, 例を紹介する.

定義 1.10　群 G の集合 M への作用が **推移的** であるとは, 次が成り立つこと:$\forall p, q \in M$, $\exists g \in G : g.p = q$.

補題 1.11（問題 (易)）　$o \in M$ を固定する．このとき，群 G の M への作用が推移的であることは次と同値：任意の $p \in M$ に対して，$g \in G$ を上手く選ぶと，$g.o = p$.

例 1.12　$n \geq 1$ とすると，$\mathrm{O}(n+1)$ および $\mathrm{SO}(n+1)$ は S^n に推移的に作用する.

例 1.13　$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{O}(n)$，$\mathrm{SO}(n)$ は $G_k(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用する.

例 1.14（問題 (標準)）　$\mathrm{O}(p+1, q)$ は $M(p, q)$ に推移的に作用する.

例 1.15　$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ および次の群 S は，$\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に推移的に作用する：

$$S := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right) \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.4　等質な集合

等質な集合を, 推移的な群作用をもつ集合として定義する.

定義 1.16　G を群とする．集合 M が G に関して **等質** であるとは，G が M に推移的に作用すること.

集合 M が G に関して等質であること，$M = G/K$ とかけることが同値になることを述べたい．そのために, まずは G/K を説明する.

定義 1.17　G を群とし，K をその部分群とする．次で定義される G 上の同値関係 $\sim$ を **K による同値関係** と呼ぶ：

$$g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K.$$

ここで定義した関係 $\sim$ が同値関係であることは，容易に確かめられる．また，$g \in G$ を含む同値類を $[g]$ で表すと，次が成り立つ：

$$[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}.$$

定義 1.18　群 G を部分群 K による同値関係で割った商集合を G/K で表し，G の K による **剰余集合** と呼ぶ.

次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 1.19　集合 M が G に関して等質であることと, $M = G/K$ と書けることは同値.

この定理を証明するためには, 以下の二つの命題を示せば良い.

命題 1.20　K を G の任意の部分群とする．このとき, G/K は G に関して等質である. 特に, 次により G は G/K に推移的に作用する: $g.[h] := [gh]$.

命題 1.21（問題 (標準)）　M が G に関して等質であるとし, $p \in M$ とする．このとき, 次の写像は全単射である: $G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$.

1.5　等質な集合の例

等質な集合 M を G/K の形で書くことを等質空間表示という．等質空間表示を求めるためには, 推移的に作用する群 G と, ある点 $p \in M$ での固定部分群を求めれば良い.

例 1.22　$n \geq 1$ とする．このとき，球面 S^n は以下の等質空間表示を持つ：

$$
\begin{aligned}
S^n &= \mathrm{O}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \\
&= \mathrm{SO}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{SO}(n) \right\}.
\end{aligned}
$$

このように, 等質空間表示は一意的ではない.

例 1.23（問題 (標準)）　以下において，行列のブロック分割のサイズは $(k, n-k)$ であるとする．グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$
\begin{aligned}
G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det \neq 0 \right\} \\
&= \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det = 1 \right\} \\
&= \mathrm{O}(n)/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \\
&= \mathrm{SO}(n)/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k),\ \det(\alpha)\det(\beta) = 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

例 1.24　上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) = S/\{e\}.$$

例 1.25（問題 (標準)）　$M(p,q)$ は次の等質空間表示をもつ:

$$M(p,q) = \mathrm{O}(p+1,q)/\mathrm{O}(p,q).$$

例 1.26　$\mathfrak{M} := \{\langle , \rangle : \mathbb{R}^n$ 上の内積 $\}$ とする．このとき，

(1)　次による $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}$ は推移的: $g.\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot)\rangle$.

(2)　$\mathfrak{M} = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

例 1.27（問題 (難)）　$\{J \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \mid J^2 = -I_{2n}\}$ を等質空間表示せよ．

第 2 章

集合としての対称空間

多様体構造などは一切仮定せずに, 集合としての対称空間を定義する. また, 等質な対称空間と対称対との間に対応があることを示す.

2.1　対称空間の定義と例

集合 X から X 自身への写像全体の成す集合を $\mathrm{Map}(X, X)$ で表す.

定義 2.1　写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考える. このとき, (X, s) が **対称空間** であるとは, 以下が成り立つこと:

(S1)　$\forall x \in X,\ s_x(x) = x$,

(S2)　$\forall x \in X,\ s_x^2 = \mathrm{id}$.

(S3)　$\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

注意 2.2　上記の条件 (S2) を次に置き換えたものを **カンドル** と呼ぶ:

(S2)'　$\forall x \in X,\ s_x$ は全単射.

例 2.3　任意の集合 X は, 次の s によって対称空間となる: $s_x := \mathrm{id}\ (\forall x \in X)$. これを **自明な対称空間** と呼ぶ.

例 2.4　$\mathbb{R}^n$ は, 次の s によって対称空間となる: $s_x(y) := 2x - y$.

例 2.5　$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ は, s_p を "軸 op に関する折り返し" で定義することにより, 対称空間となる. 式で書くと,

$$s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x.$$

問題 2.6（標準）　例 2.5 の s について $s_p \in \mathrm{O}(n+1)$ を示せ. また, これを用いて s が

(S3) をみたすことを示せ.

2.2　準同型と同型

対称空間の間の準同型や同型の概念を紹介し, 等質性を定義する.

定義 2.7　(X, s^X), (Y, s^Y) を対称空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が **準同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f$.

命題 2.8（問題 (易)）　準同型写像と準同型写像の合成は準同型である. また, 準同型写像が全単射の場合には, 逆写像も準同型である.

全単射な準同型写像を **同型写像** と呼ぶ. 上の命題から, 次が群になることが従う.

定義 2.9　対称空間 (X, s) に対して, 次を **自己同型群** と呼ぶ.

$$\mathrm{Aut}(X, s) := \{ f : X \to X : \text{同型写像} \}.$$

例 2.10　任意の $x \in X$ に対して, 次が成り立つ: $s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

定義 2.11　対称空間 (X, s) が **等質** とは, $\mathrm{Aut}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

例 2.12　(X, s) を自明な対称空間とする. このとき, 任意の全単射 $f : X \to X$ は自己同型である. よって, (X, s) は等質.

例 2.13　$\mathbb{R}^n$ を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の平行移動および線型写像は自己同型である. よって, $\mathbb{R}^n$ は等質.

例 2.14　S^n を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の $g \in \mathrm{O}(n+1)$ は自己同型である. よって, S^n は等質.

問題 2.15（標準）　等質でない対称空間の例を挙げ, それが等質でないことを示せ.

2.3　対称対

等質な集合 M は G/K の形で書くことができた. ここでは, これが等質な対称空間となるための (G, K) の性質を述べる.

定義 2.16　G を群, K を G の部分群とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. このとき, 以下の条件をみたす (G, K, σ) を **対称対** と呼ぶ: $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

次が, 等質な対称空間に関する基本的な定理.

定理 2.17　等質な対称空間は, 対称対と対応する.

注意 2.18　対称対の条件から $\sigma^2 = \mathrm{id}$ を抜いたものを **カンドル組** と呼ぶ. 上記の定理と同様に, 等質なカンドルとカンドル組も対応する. (証明も, ほとんど同様.)

この定理の正確な主張は, 以下の命題に分けて述べる. まずは, 等質な対称空間から対称対を構成する.

命題 2.19　(X, s) を等質な対称空間とする. このとき, 以下の (G, K, σ) は対称対:

$$G := \mathrm{Aut}(X, s), \quad p \in X, \quad K := G_p, \quad \sigma : G \to G : g \mapsto s_p \circ g \circ s_p^{-1}.$$

次に, 対称対から等質な対称空間を構成する.

命題 2.20　(G, K, σ) を対称対とする. このとき, 次の s により G/K は等質な対称空間になる: $s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$. このとき特に $G \subset \mathrm{Aut}(G/K, s)$.

自然に $G \curvearrowright G/K$ ($g.[h] := [gh]$ により) だったことに注意.

注意 2.21　上で定義した s は, 次のように考えると意味が分かりやすい:

(1)　原点 $[e]$ では次のように定めている: $s_{[e]}([h]) = [\sigma(h)]$.

(2)　他の点 $[g]$ には, g の作用を使ってばらまいている: $s_{[g]} = g \circ s_{[e]} \circ g^{-1}$.

2.4　等質な対称空間の例

等質な対称空間および対称対の例を紹介する.

例 2.22　任意の (G, K) に対して, $\sigma = \mathrm{id}$ とすると, (G, K, σ) は対称対. これから得られる対称空間は, 自明な対称空間.

以下では, 前に定義した行列 $I_{p,q}$ を用いる. また, 次の群を単に $\mathrm{O}(n)$ と略記することとする ($\mathrm{SO}(n)$ や $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ 等も同様に略記):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\}.$$

例 2.23　$\sigma(g) := I_{1,n} g I_{1,n}$ とおくと, 以下は対称対. 得られる対称空間は S^n と同型:

(1)　$(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n), \sigma)$.

(2)　$(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n), \sigma)$.

問題 2.24（標準）　上記の $(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n), \sigma)$ から得られる対称空間が S^n と同型であることを示せ．(ヒント: いずれも $\mathrm{O}(n+1)$ で不変な対称空間なので, 原点での点対称が一致することを確かめれば良い.)

例 2.25　$(\mathrm{O}(p+q), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q), \sigma)$ は, $\sigma(g) := I_{p,q} g I_{p,q}$ とすると対称対である．従って, 実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は対称空間になる.

例 2.26　$(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ は, $\sigma(g) := -{}^t g$ とすると対称対である．特に $n = 1$ のときを考えると, 上半平面は対称空間.

例 2.27　$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \sigma)$ は, 上と同じ σ により対称対である．得られる対称空間は "$\mathbb{R}^n$ 上の内積全体の集合" と同一視できる.

例 2.28（問題 (標準)）　$(\mathrm{O}(p+1, q), \mathrm{O}(p, q), \sigma)$ は, $\sigma(g) := I_{1,p+q} g I_{1,p+q}$ とおくと対称対である．従って, $M_{(p,q)} := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid \langle x, x \rangle_{(p+1,q)} = 1\}$ は対称空間になる.

第 3 章

左不変計量

ここでは $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ を内積付きリー代数とし, その曲率を調べていく. これらは当然ながら, 対応するリー群の上の左不変計量を調べることと同等である.

3.1 リー代数の準備

リー代数の定義と簡単な例を復習する.

定義 3.1 $\mathfrak{g}$ を実線型空間とし, $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線型写像とする. このとき $(\mathfrak{g}, [,])$ が **リー代数** とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(ii) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

リー代数を単に $\mathfrak{g}$ で表すことも多い. 次が最も典型的な例.

例 3.2 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M(n, \mathbb{R})$ は次によってリー代数: $[X, Y] := XY - YX$.

リー代数の例を与える一つの方法は, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分代数として与える方法である.

定義 3.3 $\mathfrak{g}$ をリー代数とする. $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **リー部分代数** とは, 次が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}'$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

容易に分かるように, リー部分代数はリー代数である.

例 3.4（問題 (易)） 以下は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のリー部分代数:

(1) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

(2) $\mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{R}) \mid {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$.

上記のようなリー代数は半単純と呼ばれるものである．この講義では, 半単純ではないようなもの (例えば冪零や可解) を主に取り上げる．次がその典型例.

例 3.5（問題 (易)）　以下は $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ のリー部分代数 (これを 3 次元ハイゼンベルグ代数と呼ぶ):

$$\mathfrak{h}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

リー代数を与えるもう一つの方法は, 基底に対して括弧積を表すものである．例えば $\mathfrak{h}^3$ を次のように表す (書かれていない括弧積は 0 だと思う):

$$\mathfrak{h}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \quad [e_1, e_2] = e_3.$$

3.2　曲率の定義

ここでは $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ を内積付きリー代数とし, その曲率を定義する.

定義 3.6　次で定義される $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X,Y], Z \rangle + \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

注意 3.7　上の式は, リー代数の元を左不変ベクトル場だと思って, いわゆる “Koszul 公式” に代入すれば出てくる.

注意 3.8　$U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を次で定義する:

$$2\langle U(X,Y), Z \rangle = \langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

すると U は対称であり, $\nabla_X Y = (1/2)[X,Y] + U(X,Y)$ が成り立つ．実際に計算するときには, この U を用いると便利なことが多い.

定義 3.9　$(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ を内積付きリー代数とし, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ とする.

(1) $R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ を **リーマン曲率** と呼ぶ.

(2) $\mathrm{Ric}(X) := \sum R(X, e_i) e_i$ を **リッチ曲率** と呼ぶ．ここで $\{e_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の正規直交基底.

(3) σ を $\mathfrak{g}$ 内の 2 次元部分空間とするとき, $K_\sigma := \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle$ を σ の **断面曲率** と呼ぶ．ここで $\{E_1, E_2\}$ は σ の正規直交基底.

注意 3.10（問題 (標準)）　リッチ曲率と断面曲率は, 正規直交基底の取り方に依らない.

例 3.11　$\mathfrak{g}$ が可換なら, 任意の内積 $\langle , \rangle$ に対して $R \equiv 0$.

注意 3.12　一般には, 内積を取り替えると曲率の様相も変わる.

定義 3.13　$(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ が **Einstein** とは, $\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id}$ $(c \in \mathbb{R})$ となること.

3.3　定曲率の例: 実双曲空間のリー代数

定曲率なものの例を挙げる. Einstein になることも定義に従って確かめる.

定義 3.14　次で定義される $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n} := \mathrm{span}\{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ を **実双曲空間のリー代数** と呼ぶ:

$$[A, X_i] = X_i \quad (i \in \{1, \ldots, n-1\}).$$

注意 3.15　このリー代数に対応する単連結リー群は, 実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ と自然に同一視できることが知られている. 特に, 左不変な定曲率計量をもつ. これを具体的に構成しよう.

補題 3.16　$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ に対して, 上の基底を正規直交にする内積を $\langle,\rangle$ で表す. このとき $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}, \langle,\rangle)$ について以下が成り立つ:

(1)　$U(A, A) = 0,\ U(A, X_i) = -(1/2)X_i,\ U(X_i, X_j) = \delta_{ij}A.$

(2)　$\nabla_A = 0,\ \nabla_{X_i}A = -X_i,\ \nabla_{X_i}X_j = \delta_{ij}A.$

命題 3.17　任意の 2 次元部分空間 $\sigma \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ に対して, $K_\sigma \equiv -1$.

命題 3.18　$(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}, \langle,\rangle)$ に対して, $\mathrm{Ric} = -(n-1)\mathrm{id}$. よって Einstein である.

3.4　代数的 Ricci soliton の例: ハイゼンベルグ代数

代数的 Ricci soliton を定義し, $\mathfrak{h}^3$ がその例となることを紹介する.

定義 3.19　次の $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の **微分代数** と呼ぶ:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : \text{線型} \mid D([\cdot,\cdot]) = [D(\cdot), \cdot] + [\cdot, D(\cdot)]\}.$$

例 3.20　3 次元ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{h}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対して,

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{22} = a_{33} \right\}.$$

定義 3.21　$(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ が **代数的 Ricci soliton** とは, $\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D$ $(c \in \mathbb{R},\ D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}))$ となること.

注意 3.22　$(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ に対応する単連結リー群と左不変計量の組を (G, g) とする．このとき, $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が代数的 Ricci soliton なら, (G, g) は Ricci soliton である．証明の概略は以下の通り:

- $\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D$ ($c \in \mathbb{R}$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$) と仮定する．
- $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ より, $e^{tD} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.
- G は単連結より, $\exists \varphi_t \in \mathrm{Aut}(G)$: $(d\varphi)_e = e^{tD}$.
- $X \in \mathfrak{X}(G)$ を次で定義: $X_p := \frac{d}{dt}\varphi_t|_{t=0}$.
- すると $\mathrm{ric}_g = cg - (1/2)\mathfrak{L}_X g$.

補題 3.23　$\mathfrak{h}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対し, $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交にする内積を $\langle, \rangle$ とする．このとき,

- $U(e_1, e_1) = U(e_1, e_2) = U(e_2, e_2) = U(e_3, e_3) = 0$,
- $U(e_1, e_3) = -(1/2)e_2$, $U(e_2, e_3) = (1/2)e_1$.
- $\nabla_{e_1} e_1 = 0$, $\nabla_{e_1} e_2 = (1/2)e_3$, $\nabla_{e_1} e_3 = -(1/2)e_2$,
- $\nabla_{e_2} e_1 = -(1/2)e_3$, $\nabla_{e_2} e_2 = 0$, $\nabla_{e_2} e_3 = (1/2)e_1$,
- $\nabla_{e_3} e_1 = -(1/2)e_2$, $\nabla_{e_3} e_2 = (1/2)e_1$, $\nabla_{e_3} e_3 = 0$.

命題 3.24　$(\mathfrak{h}^3, \langle, \rangle)$ は代数的 Ricci soliton. とくに

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3.5　その他のリー代数

例 3.25（問題 (やや易)）　以下の $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ について $R \equiv 0$:

- $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = 0$.
- $\langle, \rangle$ に関して $\{e_1, e_2, e_3\}$ は正規直交.

例 3.26（問題 (標準)）　以下の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\mathrm{H}^2}, \langle, \rangle)$ が Einstein であることを示せ:

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\mathrm{H}^2} := \mathrm{span}\{A, X, Y, Z\}$, $[A, X] = (1/2)X$, $[A, Y] = (1/2)Y$, $[A, Z] = Z$, $[X, Y] = Z$,
- $\langle, \rangle$ に関して $\{A, X, Y, Z\}$ は正規直交.

例 3.27（問題 (やや難)）　以下の $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が代数的 Ricci soliton であることを示せ:

- $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R} := \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $[e_1, e_2] = e_3$.
- $\langle, \rangle$ に関して $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は正規直交.

第 4 章

Milnor 型定理

前の章では, 内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が与えられたときに, その曲率を計算し, Einstein や代数的 Ricci soliton であるかを判定できることを述べた. ここでは, リー代数が与えられたときに, その上に Einstein や代数的 Ricci soliton となる内積が存在するかどうかを調べる方法を紹介する.

4.1 Milnor 枠

以下を通して $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すものとする.

定義 4.1 リー代数 $\mathfrak{g}$ が **unimodular** とは, 次が成り立つこと: $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$.

定理 4.2（Milnor, 1976） $\mathfrak{g}$ を 3 次元 unimodular リー代数とすると, 次が成り立つ: $\forall \langle, \rangle$: $\mathfrak{g}$ 上の内積, $\exists \{x_1, x_2, x_3\}$: $\langle, \rangle$ に関する正規直交基底, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3,\ [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1,\ [x_3, x_1] = \lambda_2 x_2.$$

注意 4.3 この定理により, 3 次元 unimodular リー代数の分類が得られる. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の符号が, 例えば $(+ + +)$ なら $\mathfrak{so}(3)$, $(+ + -)$ なら $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $(+00)$ なら Heisenberg.

注意 4.4 この定理により, 3 次元 unimodular リー代数上の内積がどのくらいあるかが分かる. これを使って, Einstein や Ricci soliton などの存在・非存在が分かる.

注意 4.5 この定理の証明は $\dim = 3$ に強く依存している. 実際, $[,] : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を考えると, 3 次元の特殊性により $\bigwedge^2 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ となり, 線型写像 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が得られる. この L が本質的に使われる.

注意 4.6 一方で, $\mathfrak{g}$ が 3 次元のとき, その上の内積全体の集合は $\mathfrak{M} := \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ と同一視できる. このとき $\dim \mathfrak{M} = 6$. しかし上の定理はパラメータ高々 3 つで全ての

内積を表している．残りの次元は, $[,]$ を保つ基底の取り換え (つまり $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用) で吸収されていると考えられる．

このアイデアを発展させて, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用を用いて Milnor の定理を拡張する．

4.2　自己同型群

リー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を定義し, 具体例で計算を見せる．

定義 4.7　次を $\mathfrak{g}$ の **自己同型群** と呼ぶ:

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : \text{線型同型} \mid \varphi([\cdot,\cdot]) = [\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)]\}$$

例 4.8　次のリー代数を考える: $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $[e_1, e_2] = e_2$. このとき,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

上で定義したリー代数は, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^2} \oplus \mathbb{R}$ という直和リー代数と同型.

例 4.9（問題 (標準)）　3 次元ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{h}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対して,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{33} \right\}.$$

4.3　軌道の代表系

群 H が集合 M に作用しているとする．推移的とは限らない．

定義 4.10　各 $p \in M$ に対し, 次を p を通る軌道と呼ぶ: $H.p := \{h.p \mid h \in H\}$.

定義 4.11　$\mathfrak{U}$ を M 内の部分集合とする．このとき, $\mathfrak{U}$ が H-作用に関する **軌道の代表系** であるとは, 次が成り立つこと: $\mathfrak{U}$ が全ての H-軌道と交わる．

例えば $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ なら, 原点を通る直線は軌道の代表系．

上記の設定を $M := G/K$ という等質な集合の場合に考える．H を G 内の部分群とすると, H は M に自然に作用する．

定義 4.12　上記の作用 $H \curvearrowright M = G/K$ を考え, $o := [e]$ とおく．また, $\mathfrak{U}$ を G の部分集合とする．このとき, $\mathfrak{U}$ が **軌道の代表系** であるとは, 次が成り立つこと: $\{h.o \mid h \in \mathfrak{U}\}$ が全ての H-軌道と交わる．

補題 4.13（問題 (標準)） $H \curvearrowright M = G/K$ とし, $\mathfrak{U}$ を G の部分集合とする. このとき, $\mathfrak{U}$ が軌道の代表系であることと次が同値: $\forall g \in G, \exists u \in \mathfrak{U} : u \in HgK$.

ここで $HgK := \{hgk \mid h \in H,\ k \in K\}$. これを **両側剰余類** と呼ぶ. 記号の簡略化のため, これを単に $[[g]]$ と書くこともある.

例 4.14 上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ について, 以下の群を考える:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき以下が成り立つ:

(1) $A \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に対して, N は軌道の代表系.

(2) $N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に対して, A は軌道の代表系. (問題 (やや易))

例 4.15 $\mathfrak{M} := \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ への次の群の作用を考える:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

このとき次の $\mathfrak{U}$ は軌道の代表系:

$$\mathfrak{U} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\}.$$

例 4.16（問題 (やや易)） $\mathfrak{M} := \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ への次の群の作用を考える:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

このとき, $\mathfrak{U} := \{I_3\}$ が軌道の代表系 (すなわち作用が推移的) である.

4.4 主定理

以下では $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ と同一視する.

補題 4.17（復習） $\mathfrak{g}$ を n 次元とし, $\mathfrak{M}(\mathfrak{g}) := \{\langle , \rangle : \mathfrak{g}$ 上の内積 $\}$ とおく. このとき,

(1) 次で定まる $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ は推移的: $g.\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot) \rangle$.

(2) $\mathfrak{M}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$. これは対称空間.

我々は次の作用を考える:

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\} \curvearrowright \mathfrak{M}(\mathfrak{g}).$$

また, 基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を正規直交にする $\mathfrak{g}$ 上の内積 (すなわち原点) を $\langle , \rangle_0$ で表す.

定理 4.18　作用 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に対して, $\mathfrak{U}$ が軌道の代表系であるとする. このとき次が成り立つ: $\forall \langle , \rangle$: $\mathfrak{g}$ 上の内積, $\exists k > 0$, $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\exists g \in \mathfrak{U}$: $\{\varphi g e_1, \ldots, \varphi g e_n\}$ は $k\langle , \rangle$ に関する正規直交基底.

命題 4.19　次のリー代数を考える: $\mathfrak{g} := \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $[e_1, e_2] = e_2$. このとき次が成り立つ: $\forall \langle , \rangle$, $\exists \lambda \geq 0$, $\exists k > 0$, $\exists \{x_1, x_2, x_3\}$: $k\langle , \rangle$ に関する正規直交基底 :

$$[x_1, x_2] = x_2 + \lambda x_3.$$

この命題のようなものを「Milnor 型定理」と呼ぶ. 軌道の代表系 $\mathfrak{U}$ を求めることができれば, 原理的には任意のリー代数に対して手続きは適用可能である.

系 4.20（問題 (標準)）　上記のリー代数は, Einstein 内積を許容しないが, 代数的 Ricci soliton を許容することを示せ.

問題 4.21（(難)）　上の手続きを $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (他の unimodular なものでも良い) に適用し, その場合に Milnor 枠が復元できるかどうかを確かめよ.

注意 4.22　$\mathfrak{g}$ を $p+q$ 次元リー代数として,

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathfrak{M}_{p,q}(\mathfrak{g}) := \{\langle , \rangle : \mathfrak{g} \text{ 上の符号数 } (p,q) \text{ の内積 }\} \cong \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,q)$$

を考えると, 「擬リーマン版 Milnor 型定理」を得ることができる.

問題 4.23（(極めて難)）　同様の枠組を「左不変複素構造」に対して定式化せよ. また, $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}$ に概複素構造は本質的にいくつあるか？

参考文献

[1] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, preprint. ArXiv:1501.05513.

[2] Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.

[3] Helgason, S.: *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics **XII**, Academic Press, New York-London, 1962.

[4] Ishihara, Y., Tamaru, H.: Flat connected finite quandles, preprint. ArXiv:1509.08340.

[5] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.* **135** (2011), 229–243.

[6] Kubo, A., Onda, K., Taketomi, Y., Tamaru, H.: On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups, preprint. ArXiv:1509.08336.

[7] Lauret, J.: Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), 715–733.

[8] Loos, O.: *Symmetric spaces. I: General theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[9] Milnor, J.: Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.* **21** (1976), 293–329.

[10] 田中真紀子, 田丸博士: 対称空間の幾何学 (執筆中).

参考文献への追加コメント

[3, 8] は対称空間の標準的な教科書. 第 2 章の内容のカンドル版が [4] にある.

[7] が代数的 Ricci soliton を最初に導入した論文 (当初は冪零だけで話をしていたので nilsoliton と呼ばれていた). その後に関連する論文が山ほど出ている.

[2, 5] が第 4 章の内容. 3 次元の場合は [1] に詳しい. [6] は擬リーマン版.