

R-space 入門

田丸 博士 (広島大学 大学院理学研究科)

Version 1.1 (2012/02/29)

まえがき

Version 1.1 へのまえがき

本稿は、大阪市立大学数学研究所連続講義 (2012/02/22–24) で配付した講義資料に、若干の修正を加えたものです。現時点ではあくまでも講義資料で、読み物の形式には全くなっていません。そもそも文章がほとんどありません。内容にも、変更および追加の余地があると考えています。将来的に読み物として読める形にまとめられるかどうかは分かりませんが、本稿は、一応それに向けて内容を整理している途中段階のノートです。

講義の要旨

R-space とは、ある種のコンパクト等質空間の総称で、いくつかの対称空間 (対称 R-space), 旗多様体, コンパクト単連結等質 Kahler 多様体 (Kähler C-space) などを含むクラスです。この講義では、R-space の基礎的な部分を、背景となる半単純リー代数および非コンパクト型対称空間の理論に重点を置いて解説します。また、R-space のいくつかの応用、例えば球面内の等質超曲面や Hermite 対称空間内の実形など、についても触れる予定です。

目次

| | | |
|-------|---------------------------------|----|
| 第 1 章 | 半単純 Lie 代数の制限ルート系 | 1 |
| 1.1 | Killing 形式 | 1 |
| 1.2 | Cartan 分解 | 2 |
| 1.3 | 制限ルート系 | 3 |
| 1.4 | 単純ルート | 5 |
| 第 2 章 | 階別 Lie 代数と放物型部分 Lie 代数 | 7 |
| 2.1 | 階別 Lie 代数 | 7 |
| 2.2 | 放物型部分 Lie 代数 | 10 |
| 第 3 章 | 対称空間の線型イソトロピー表現 | 11 |
| 3.1 | s-表現 | 11 |
| 3.2 | s-表現の軌道 | 12 |
| 第 4 章 | R-space | 14 |
| 4.1 | 放物型部分 Lie 代数と R-space | 14 |
| 4.2 | s-表現と R-space | 15 |
| 4.3 | 対称 R-space | 15 |
| 4.4 | Kähler C-空間 | 15 |
| 第 5 章 | 球面内の等質超曲面 | 17 |
| 5.1 | 余等質性 | 17 |
| 5.2 | s-表現の余等質性 | 17 |
| 5.3 | 球面内の等質超曲面 | 18 |
| 第 6 章 | Hermite 対称空間の実形 | 19 |
| 6.1 | 実形 | 19 |
| 6.2 | Kähler C-space の実形 | 19 |

| | | |
|-----|---------------------------|----|
| 6.3 | Hermite 対称空間の実形 | 20 |
|-----|---------------------------|----|

第 1 章

半単純 Lie 代数の制限ルート系

この章では, 半単純 Lie 代数の制限ルート系を定義し, いくつかの具体例を紹介する.

1.1 Killing 形式

以下では, \mathfrak{g} を Lie 代数とする.

1.1.1 Killing 形式の基礎

定義 1.1 次で定義される写像 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ を **Killing 形式** と呼ぶ:

$$B(X, Y) := \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y). \quad (1.1)$$

命題 1.2 Killing 形式 B は対称双線型写像であり, 次をみたす:

$$B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}). \quad (1.2)$$

1.1.2 Killing 形式の具体例

例 1.3 一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X, Y) = 2n\text{tr}(XY) - 2\text{tr}(X)\text{tr}(Y). \quad (1.3)$$

命題 1.4 Lie 代数 \mathfrak{g} のイデアルを \mathfrak{g}' とし, それぞれの Killing 形式を B, B' とする. このとき B' は B の制限となる, すなわち,

$$B' = B|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'}. \quad (1.4)$$

例 1.5 特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X, Y) = 2n\text{tr}(XY). \quad (1.5)$$

問題 1.6 不定値直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ の Killing 形式を求めよ.

1.1.3 Killing 形式の一般論

定理 1.7 ([6], p50, Theorem 1.45) Lie 代数が半単純であるための必要十分条件は, Killing 形式が非退化となること.

定理 1.8 ([6], pp249–250, Corollary 4.26, 4.27) 半単純 Lie 代数がコンパクトであるための必要十分条件は, Killing 形式が負定値となること.

1.2 Cartan 分解

以下では, \mathfrak{g} を半単純 Lie 代数, B を \mathfrak{g} の Killing 形式とする.

1.2.1 Cartan 分解の基礎

写像 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が 対合^{*1} であるとは, θ が Lie 代数としての自己同型写像であり, $\theta^2 = \text{id}$ をみたすことである.

定義 1.9 対合 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が Cartan 対合 であるとは, 次で定義される B_θ が正定値となること:

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta(Y)) \quad (\text{for } X, Y \in \mathfrak{g}). \quad (1.6)$$

Cartan 対合 θ は対合なので, その固有値は ± 1 のいずれかである.

定義 1.10 Cartan 対合 θ による固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解 と呼ぶ. ただしここで, \mathfrak{k} は固有値 1, \mathfrak{p} は固有値 -1 に対応する固有空間である.

命題 1.11 Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は次をみたす:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}. \quad (1.7)$$

1.2.2 Cartan 分解の具体例

例 1.12 特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ に対して, 次は Cartan 対合である:

$$\theta(X) := -{}^t X. \quad (1.8)$$

*1 involution

これによって得られる Cartan 分解 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は、次で与えられる:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n), \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \mid X = {}^t X\}. \quad (1.9)$$

例 1.13 不定値直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(p, q)$ に対して、次は Cartan 対合である:

$$\theta(X) := I_{p,q} X I_{p,q}. \quad (1.10)$$

これによって得られる Cartan 分解 $\mathfrak{so}(p, q) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は、次で与えられる:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q), \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} & {}^t C \\ C & \end{pmatrix} \mid C \in M_{q,p}(\mathbb{R}) \right\}. \quad (1.11)$$

1.2.3 Cartan 分解の一般論

命題 1.14 コンパクト Lie 代数 \mathfrak{g} に対して、恒等写像 id は Cartan 対合である.

要するに、Cartan 分解を考えることは、非コンパクト型対称空間を考えてることと同等である.

定理 1.15 ([6], p358, Corollary 6.18, 6.19) 任意の半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対して、Cartan 対合が存在する. さらに、Cartan 対合は (内部自己同型による) 共役を除いて一意である.

1.3 制限ルート系

以下では、 \mathfrak{g} を半単純 Lie 代数、 B を Killing 形式、 θ を Cartan 対合、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする.

1.3.1 制限ルート系の基礎

補題 1.16 任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して、 ad_X は B_θ に関して対称である. よって ad_X の固有値は全て実数になる.

この性質により、コンパクトな場合に比べてルートの定義が簡潔になる. ここで、 \mathfrak{a} を \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間とする. また、 \mathfrak{a} の双対空間を \mathfrak{a}^* で表す.

定義 1.17 各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して、次を α に対応する 制限ルート空間 と呼ぶ:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad (\forall H \in \mathfrak{a})\}. \quad (1.12)$$

定義 1.18 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が (\mathfrak{a} に関する) 制限ルート とは, 次が成り立つこと: $\alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$.
また, ルート全体の集合を 制限ルート系 と呼び, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ で表す.

命題 1.19 制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ は B_θ に関する直交直和分解,
- (2) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ($\forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$),
- (3) $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ($\forall \alpha \in \Delta \cup \{0\}$).

この (1) の分解を 制限ルート空間分解 と呼ぶ.

1.3.2 制限ルート系の具体例

行列単位を E_{ij} で表す.

例 1.20 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{a} := \{\sum a_k E_{kk} \mid \text{tr} = 0\}$ は \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間,
- (2) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,
- (3) $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \text{span}\{E_{ij}\}$, ただしここで $\varepsilon_i(\sum a_k E_{kk}) := a_i$,
- (4) $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$.

例 1.21 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{a} := \{\sum a_k E_{kk} \mid \text{tr} = 0\}$ は \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間,
- (2) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,
- (3) $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \text{span}\{E_{ij}\}$, ただしここで $\varepsilon_i(\sum a_k E_{kk}) := a_i$,
- (4) $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$.

例 1.22 $\mathfrak{so}(1, n)$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{a} := \text{span}\{E_{12} + E_{21}\}$ は \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間,
- (2) $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{so}(n-1) \oplus \mathfrak{a}$,
- (3) $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ を $\alpha(E_{12} + E_{21}) = 1$ によって定めると, $\Delta = \{\pm\alpha\}$.

例 1.23 $\mathfrak{so}(2, 2)$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{a} := \text{span}\{E_{13} + E_{31}, E_{24} + E_{42}\}$ は \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間,
- (2) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,
- (3) $\Delta = \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2\}$, ただしここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{a}^*$ は次で定める:

$$\varepsilon_i(a_1(E_{12} + E_{21}) + a_2(E_{24} + E_{42})) = a_i. \quad (1.13)$$

例 1.24 $\mathfrak{so}(2, n)$ (ただし $n > 2$) に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{a} := \text{span}\{E_{13} + E_{31}, E_{24} + E_{42}\}$ は \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間,
- (2) $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{so}(n-2) \oplus \mathfrak{a}$,
- (3) $\Delta = \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2, \pm\varepsilon_1, \pm\varepsilon_2\}$, ただしここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{a}^*$ は上と同じもの.

1.3.3 制限ルート系の一般論

定理 1.25 ([6], p378, Theorem 6.51) $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ を \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間とする. このとき, これらは K の元による共役で移り合う.

ちなみに K は \mathfrak{k} に対応する Lie 群. この \mathfrak{a} の次元を, \mathfrak{g} の実階数と呼ぶ. これは, 対応する対称空間 G/K の階数と言っても良い. 単に階数と言ったら Cartan 部分代数の次元のことを意味するので, それとは区別する必要がある.

定理 1.26 ([6], p380, Corollary 6.53) 制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は, 抽象的な意味でのルート系になる.

1.4 単純ルート

1.4.1 単純ルートの基礎

定義 1.27 Δ をルート系とする. $\Delta \supset \Lambda := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ が単純ルート系であるとは, 次が成り立つこと:

- (i) Λ は \mathfrak{a}^* の基底,
- (ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, 次をみたす $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が存在する: $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r$.

定義 1.28 Δ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とし, $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r \in \Delta$ とする.

- (1) $\alpha \in \Delta$ が正ルートとは, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となること.
- (2) $\alpha \in \Delta$ が負ルートとは, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ となること.
- (3) $\alpha \in \Delta$ が最高ルートとは, 次が成り立つこと: 任意の $c'_1\alpha_1 + \dots + c'_r\alpha_r \in \Delta$ に対して, $c_1 \geq c'_1, \dots, c_r \geq c'_r$.

1.4.2 単純ルートの具体例

例 1.29 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ のとき, $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) とおくと, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ は単純ルート系. 最高ルートは, $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$.

例 1.30 $\mathfrak{so}(2, 2)$ のとき, $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とおくと, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は単純ルート系.

例 1.31 $\mathfrak{so}(2, n)$ のとき (ただし $n > 2$), $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2$ とおくと, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は単純ルート系. 最高ルートは, $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

1.4.3 単純ルートの一般論

制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は抽象的な意味でのルート系なので, ルート系の一般論はそのまま使える (例えば, 単純ルート系の存在など). また, 次の性質より, Weyl 群の一般論も使って良いことになる.

定理 1.32 ([6], p383, Theorem 6.57) $N_K(\mathfrak{a})$ と $Z_K(\mathfrak{a})$ を, それぞれ K における \mathfrak{a} の正規化群と中心化群とする. このとき, 商群 $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ は, 制限ルート系 Δ の Weyl 群と一致する.

第 2 章

階別 Lie 代数と放物型部分 Lie 代数

この章では、階別 Lie 代数および放物型部分 Lie 代数を定義し、その具体例を紹介する。特に、これらが制限ルート系によって完全に統制されることを述べる。階別 Lie 代数は、graded Lie algebra の直訳のつもりで使っているが、次数付き Lie 代数と呼ばれることもある。

以下では \mathfrak{g} は半単純 Lie 代数とする。

2.1 階別 Lie 代数

2.1.1 階別 Lie 代数の定義

定義 2.1 線型空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が階別 Lie 代数 であるとは、次が成り立つこと: $[\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^q] \subset \mathfrak{g}^{p+q}$ ($\forall p, q \in \mathbb{Z}$).

定義 2.2 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が第 ν 種 であるとは、次が成り立つこと:

- (i) $\mathfrak{g}^\nu \neq 0$,
- (ii) $|p| > \nu$ ならば $\mathfrak{g}^p = 0$.

2.1.2 階別 Lie 代数の簡単な例

例 2.3 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ に対して、次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline * & \\ * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & * & * \\ & * & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline & & \\ & & \end{array} \right) \right\} \quad (2.1)$$

例 2.4 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ に対して, 次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ \hline * & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & * \\ & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\} \quad (2.2)$$

例 2.5 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ に対して, 次は第 2 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-2} := \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline * & & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ * & & & \\ \hline & & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & * & & \\ & & & \\ \hline & & & * \end{array} \right) \right\}, \\ \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & * & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^2 := \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & * & \end{array} \right) \right\}. \quad (2.3)$$

命題 2.6 上と同様に, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ をブロック分割することにより, 階別 Lie 代数を構成することができる.

2.1.3 階別 Lie 代数の構成法

定義 2.7 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ に対して, $Z \in \mathfrak{g}$ が特性元であるとは, 次が成り立つこと:

$$\mathfrak{g}^k = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = kX\} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad (2.4)$$

階別 Lie 代数を構成するためには, 特性元になり得る $Z \in \mathfrak{g}$ を構成すれば良い. そのために, 制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, 単純ルート系 $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ を用いる.

定義 2.8 $\mathfrak{a} \supset \{H^1, \dots, H^r\}$ が Λ の双対基底とは, 次が成り立つこと: $\alpha_i(H^j) = \delta_{ij}$ ($\forall i, j$).

定理 2.9 $Z := n_1 H^1 + \dots + n_r H^r$ (ただし $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおく. このとき, 次が成り立つ:

- (1) ad_Z による固有空間分解は階別 Lie 代数となり, その特性元は Z である.
- (2) 最高ルートを $\tilde{\alpha}$ とすると, (1) で得られた階別 Lie 代数は第 $\tilde{\alpha}(Z)$ 種である.

ちなみに上記の Z によって与えられる階別 Lie 代数は, ルート空間を用いて次のように書くことができる:

$$\mathfrak{g}^k = \bigoplus_{\alpha(Z)=k} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (2.5)$$

2.1.4 階別 Lie 代数の例

例 2.10 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ に対して, 前述の $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を考える. このとき,

(1) Λ の双対基底は次で与えられる:

$$H^1 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

(2) $Z = H^1, H^2$ から第 1 種の階別 Lie 代数が得られる,

(3) $Z = H^1 + H^2$ から第 2 種の階別 Lie 代数が得られる.

例 2.11 $\mathfrak{so}(1, n)$ に対して, $Z = E_{12} + E_{21}$ から第 1 種の階別 Lie 代数が得られる. 各部分空間はルート空間を用いて次のように表される:

$$\mathfrak{g}^{-1} = \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_\alpha. \quad (2.7)$$

例 2.12 上の階別 Lie 代数を複素化することにより, $\mathfrak{so}(n+1, \mathbb{C})$ の第 1 種の階別 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}^{-1})^{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{g}^0)^{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}$ が得られる.

例 2.13 $\mathfrak{so}(2, n)$ (ただし $n > 2$) に対して,

(1) $Z = H^1$ から第 1 種の階別 Lie 代数が得られる,

(2) $Z = H^2$ から第 2 種の階別 Lie 代数が得られる,

(3) $Z = H^1 + H^2$ から第 3 種の階別 Lie 代数が得られる.

2.1.5 階別 Lie 代数の一般論

半単純階別 Lie 代数の分類のあらすじを述べる. 結果としては, 全ての半単純階別 Lie 代数は, 定理 2.9 の方法により, 同型を除いて全て得られる.

定理 2.14 全ての階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ に対して, 特性元が一意に存在する.

証明は, 半単純 Lie 代数の $\text{Der}(\mathfrak{g})$ の性質から従う. 特性元を Z とすると, 次に $Z \in \mathfrak{p}$ となる (ような Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が存在する) ことが必要.

定理 2.15 (cf. [8]) 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ の特性元を Z とする. このとき, 次をみたす Cartan 対合 θ が存在する: $\theta(Z) = -Z$.

ちなみに $\theta(Z) = -Z$ は, 次と同値である: $\theta(\mathfrak{g}^k) = \mathfrak{g}^{-k}$ ($\forall k$). この条件は grade-reversing と呼ばれる. あとは, \mathfrak{a} の共役性や Λ の共役性を用いると, 分類が完成する (同型の定義を述べていないが).

2.2 放物型部分 Lie 代数

2.2.1 放物型部分 Lie 代数の基礎

定義 2.16 部分 Lie 代数 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ が放物型であるとは、次が成り立つこと: 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が存在して, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ となる.

よって前述の階別 Lie 代数の例から, 放物型部分 Lie 代数の例を容易に構成することができる.

命題 2.17 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ の特性元を $Z \in \mathfrak{a}$ とする. このとき, 対応する放物型部分 Lie 代数 \mathfrak{q} は次をみたす:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha(Z) \geq 0} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (2.8)$$

2.2.2 放物型部分 Lie 代数の性質

ここでは放物型部分 Lie 代数を, 階別 Lie 代数を用いて定義したが, これは通常とは書き方が異なっている. 例えば [6] では“極小放物型部分 Lie 代数を含む”という方法で定義している. 当然ながら, 定義はどの方法でも同値である.

第 3 章

対称空間の線型イソトローピー表現

3.1 s-表現

3.1.1 s-表現の定義

以下では $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし, 対応する Lie 群の組を (G, K) で表す.

定義 3.1 次で定義される K の \mathfrak{p} への線型表現を s-表現 と呼ぶ:

$$\varphi : K \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{p}) : g \mapsto \mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{p}}. \quad (3.1)$$

3.1.2 s-表現の例

例 3.2 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$ から得られる s-表現は,

$$\mathrm{SO}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R}) ; g.X := gXg^{-1}. \quad (3.2)$$

例 3.3 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathrm{Herm}_n^0(\mathbb{C})$ から得られる s-表現は,

$$\mathrm{SU}(n) \curvearrowright \mathrm{Herm}_n^0(\mathbb{C}) ; g.X := gXg^{-1}. \quad (3.3)$$

3.1.3 s-表現の性質

一般に G/K の線型イソトローピー表現は, 各 $g \in K$ に対して, 写像

$$g : G/K \rightarrow G/K : [h] \mapsto [gh] \quad (3.4)$$

の原点 $o = [e]$ での微分

$$(g_*)_o : T_o(G/K) \rightarrow T_o(G/K) \quad (3.5)$$

で与えられる.

定理 3.4 ここで述べた意味での線型イソトローピー表現と、前述の s -表現は、表現として同値である。

また、ここでの s -表現は、非コンパクト型対称空間だけを考えているが、コンパクト型対称空間との双対によって s -表現は不変なので、本質的にこれで十分である。

3.2 s -表現の軌道

それぞれの s -表現に対して、 $v \in \mathfrak{p}$ を通る軌道 $K.v$ を決定したい。

3.2.1 制限ルートに関する準備

補題 3.5 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して、次が成り立つ: $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_\alpha = 0, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

定義 3.6 各 $\alpha \in \Delta$ に対して、次を \mathfrak{k} および \mathfrak{p} の制限ルート空間と呼ぶ:

$$\mathfrak{k}_\alpha := \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}), \quad \mathfrak{p}_\alpha := \mathfrak{p} \cap (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}). \quad (3.6)$$

例 3.7 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ に対して、 $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ とおくと、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_\alpha &= \mathfrak{k} \cap \left\{ \begin{pmatrix} & * & \\ * & & \\ & & \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{p}_\alpha &= \mathfrak{p} \cap \left\{ \begin{pmatrix} & * & \\ * & & \\ & & \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

補題 3.8 次が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0$ は部分 Lie 代数,
- (2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して、 $\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k}_{-\alpha}$, $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_{-\alpha}$.

補題 3.9 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して、次が成り立つ: $\mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

命題 3.10 制限ルート空間に関して、次が成り立つ:

- (1) $\dim \mathfrak{k}_\alpha = \dim \mathfrak{p}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ ($\forall \alpha \in \Delta$),
- (2) 次が成り立つ (これらを \mathfrak{k} および \mathfrak{p} の制限ルート空間分解と呼ぶ):

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{k}_\alpha \right), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{p}_\alpha \right). \quad (3.8)$$

3.2.2 s-表現の軌道の局所型

ここでは, 固定部分群 K_v の Lie 代数 \mathfrak{k}_v を調べる.

命題 3.11 各 $v \in \mathfrak{p}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathfrak{k}_v = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, v] = 0\}. \quad (3.9)$$

系 3.12 各 $Z \in \mathfrak{a}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathfrak{k}_Z = \mathfrak{k}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha(Z)=0} \mathfrak{k}_\alpha. \quad (3.10)$$

例 3.13 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(3) \oplus \text{Sym}_3^0(\mathbb{R})$ から得られる s-表現に対して, 次が成り立つ:

- (1) $Z = H^1$ のとき, $\mathfrak{so}(3)_Z = \mathfrak{so}(2)$ ($= \mathfrak{so}(1) \oplus \mathfrak{so}(2)$),
- (2) $Z = H^2$ のとき, $\mathfrak{so}(3)_Z = \mathfrak{so}(2)$ ($= \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(1)$),
- (3) $Z = H^1 + H^2$ のとき, $\mathfrak{so}(3)_Z = 0$.

例 3.14 $\mathfrak{so}(1, n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ から得られる s-表現を考え, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ とおく. このとき, $0 \neq Z \in \mathfrak{a}$ ならば, 次が成り立つ: $\mathfrak{k}_Z = \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(n-1)$.

例 3.15 $\mathfrak{so}(2, n) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ から得られる s-表現を考え, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(n)$ とおく. このとき, 次が成り立つ:

- (1) $Z = H^1$ のとき, $\mathfrak{k}_Z = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_{\alpha_2} = \mathfrak{so}(n-1)$,
- (2) $Z = H^2$ のとき, $\mathfrak{k}_Z = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_{\alpha_1} = \mathfrak{so}(n-2) \oplus \mathfrak{so}(2)$,
- (3) $Z = H^1 + H^2$ のとき, $\mathfrak{k}_Z = \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(n-2)$.

3.2.3 s-表現の軌道の性質

定理 3.16 s-表現の全ての軌道は, 次の部分集合と交わる:

$$\{c_1 H^1 + \cdots + c_r H^r \in \mathfrak{a} \mid c_1, \dots, c_r \geq 0\}. \quad (3.11)$$

系 3.17 s-表現に対して, 登場し得る \mathfrak{k}_Z の共役類は, 高々 2^r 個である.

第 4 章

R-space

4.1 放物型部分 Lie 代数と R-space

4.1.1 R-space の定義

定義 4.1 \mathfrak{q} を \mathfrak{g} の放物型部分 Lie 代数とする. また, G を \mathfrak{g} を Lie 代数に持つ Lie 群で中心が自明なものとし, $Q := N_G(\mathfrak{q})$ とおく. このとき, 等質多様体 G/Q を R-space と呼ぶ.

4.1.2 R-space の例 (1)

$1 \leq k_1 < \cdots < k_s < n$ とし, 型が (k_1, \dots, k_s) の旗多様体を $F_{k_1, \dots, k_s}(\mathbb{R}^n)$ で表す. 複素の場合には $F_{k_1, \dots, k_s}(\mathbb{C}^n)$ と表す.

例 4.2 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の 3 つの放物型部分 Lie 代数から得られる R-space は, それぞれ次と同型である: $G_1(\mathbb{R}^3)$, $G_2(\mathbb{R}^3)$, $F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

例 4.3 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ の 3 つの放物型部分 Lie 代数から得られる R-space は, それぞれ次と同型である: $G_1(\mathbb{C}^3)$, $G_2(\mathbb{C}^3)$, $F_{1,2}(\mathbb{C}^3)$.

例 4.4 全ての型の旗多様体 $F_{k_1, k_2, \dots, k_s}(\mathbb{R}^n)$ は R-space である.

4.2 s-表現と R-space

4.2.1 s-表現と R-space の関係

定理 4.5 全ての R-space は, s-表現の軌道として実現できる. よって特にコンパクトである. 逆に, s-表現の軌道は全て R-space である.

4.2.2 R-space の例 (2)

例 4.6 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ から得られる 3 つの R-space は, 次の表現の軌道として得られる:

$$SO(3) \curvearrowright \text{Sym}_3^0(\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t X = X\}, \quad g.X := gXg^{-1}. \quad (4.1)$$

例 4.7 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ から得られる 3 つの R-space は, 次の表現の軌道として得られる:

$$SU(3) \curvearrowright \text{Herm}_3^0(\mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{X} = X\}, \quad g.X := gX\bar{g}^{-1}. \quad (4.2)$$

例 4.8 $\mathfrak{so}(1, n)$ から得られる R-space は本質的に一つであり, それは球面 S^{n-1} である.

例 4.9 $\mathfrak{so}(1, n) = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ を複素化して得られる $\mathfrak{so}(n+1, \mathbb{C})$ の階別 Lie 代数を考える. これから定まる R-space は, $SO(n+1)/(SO(2) \times SO(n-1)) = G_2(\mathbb{R}^{n+1}) \sim (= Q_{n-1}(\mathbb{C}))$ である.

4.3 対称 R-space

定理 4.10 第 1 種の階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ から得られる R-space は対称空間である (これを 対称 R-space と呼ぶ).

第 1 種の階別 Lie 代数は, 最高ルートの係数が 1 になる個所を見れば分かることを既に述べた.

例 4.11 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の前述の 2 つの第 1 種階別 Lie 代数から得られる対称 R-space は, それぞれ $G_1(\mathbb{R}^3)$ と $G_2(\mathbb{R}^3)$ である.

4.4 Kähler C-空間

定理 4.12 複素の階別 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^k$ から得られる R-space は等質な Kähler 構造を許容する (これを Kähler C-space と呼ぶ).

例 4.13 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ の前述の 2 つの第 1 種階別 Lie 代数から得られる対称 R-space は, それぞれ $G_1(\mathbb{C}^3)$ と $G_2(\mathbb{C}^3)$ である. これらは Hermite 対称空間になる. ちなみに $F_{1,2}(\mathbb{C}^3)$ も等質 Kähler 多様体になる.

定理 4.14 以下は互いに同値である:

- (1) M は Kähler C-space である,
- (2) M はコンパクト半単純 Lie 群の随伴軌道である,
- (3) $M = G/C(S)$ と書ける, ただし G はコンパクト半単純 Lie 群, S は G 内のトーラス部分群, $C(S)$ は S の中心化群.
- (4) M はコンパクト単連結等質 Kähler 多様体である.

第 5 章

球面内の等質超曲面

全ての R -space は球面内の等質部分多様体となる。この章では球面内の等質超曲面に関する話題を紹介する。

5.1 余等質性

5.1.1 余等質性の定義

定義 5.1 Lie 群 H がリーマン多様体 M に等長的に作用しているとする。このとき、最大次元の軌道の余次元を、この作用の余等質性 ^{*1} と呼ぶ。

5.1.2 余等質性の例

例 5.2 H の M への作用が推移的ならば、余等質性は 0。

例 5.3 $SO(n)$ の \mathbb{R}^n への標準的な作用の余等質性は 1。

例 5.4 $SO(3)$ の $\text{Sym}_3^0(\mathbb{R})$ への s -表現の余等質性は 2。

例 5.5 $SU(3)$ の $\text{Herm}_3^0(\mathbb{C})$ への s -表現の余等質性は 2。

5.2 s -表現の余等質性

定義 5.6 $Z \in \mathfrak{a}$ が非特異元 ^{*2} であるとは、次が成り立つこと: $\forall \alpha \in \Delta, \alpha(Z) \neq 0$ 。

^{*1} cohomogeneity

^{*2} regular element

例 5.7 $Z := H^1 + \cdots + H^r$ は非特異元である.

命題 5.8 $Z \in \mathfrak{a}$ とする. このとき, s -表現に関して, 次が成り立つ: Z を通る軌道 $K.Z$ が最大次元の軌道であるための必要十分条件は, Z が非特異元であること.

定理 5.9 Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ から得られる s -表現の余等質性は, $\dim \mathfrak{a}$ (すなわち, \mathfrak{g} の実階数) と一致する.

5.3 球面内の等質超曲面

5.3.1 球面内の等質部分多様体

命題 5.10 K の \mathfrak{p} への s -表現は, 内積 $B_\theta|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ を保つ.

例 5.11 $SO(n)$ の $\text{Sym}_n^0(\mathbb{R})$ への s -表現は, 内積 $B_\theta|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}(X, Y) = 2n \text{tr}(X^t Y)$ を保つ.

系 5.12 $Z \in \mathfrak{p}$ が $B_\theta(Z, Z) = 1$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$K.Z \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid B_\theta(X, X) = 1\} \cong S^{n-1}. \quad (5.1)$$

5.3.2 球面内の等質超曲面

定理 5.13 $\dim \mathfrak{a} = 2$ とし, $Z \in \mathfrak{a}$ が $B_\theta(Z, Z) = 1$ をみたす非特異元であるとする. このとき, 軌道 $K.Z$ は \mathfrak{p} の単位球面 S^{n-1} 内の等質超曲面である.

逆に, 球面内の全ての等質超曲面は, この方法で全て得られることが知られている.

例 5.14 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, p) \oplus \mathfrak{so}(1, q)$ から次の等質超曲面が得られる:

$$S^{p-1} \times S^{q-1} \subset S^{p+q-1} (\subset \mathfrak{p}). \quad (5.2)$$

例 5.15 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ から次の等質超曲面が得られる:

$$F_{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset S^4 \subset \text{Sym}_3^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5. \quad (5.3)$$

例 5.16 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ から次の等質超曲面が得られる:

$$F_{1,2}(\mathbb{C}^3) \subset S^7 \subset \text{Herm}_3^0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8. \quad (5.4)$$

ちなみに, 実階数 2 の Lie 代数は分類されている. その制限ルート系は, $A_1 + A_1$, A_2 , $B_2 (= C_2)$, BC_2 , G_2 のいずれかである.

第 6 章

Hermite 対称空間の実形

6.1 実形

6.1.1 実形の定義

定義 6.1 M を Hermite 多様体とする. 部分多様体 $N \subset M$ が M の実形 (real form) であるとは, 次が成り立つこと: M の反正則対合的等長変換 σ が存在して, $N = \text{Fix}(\sigma; M)$ となる.

6.1.2 実形の例

例 6.2 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ は実形である.

例 6.3 $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ は実形である.

6.2 Kähler C-space の実形

定理 6.4 階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ から得られる R-space を G/Q , その複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}^k)^{\mathbb{C}}$ から得られる Kähler C-space を $G^{\mathbb{C}}/Q^{\mathbb{C}}$ とする. このとき, G/Q は $G^{\mathbb{C}}/Q^{\mathbb{C}}$ の実形である.

ここでは $G^{\mathbb{C}}/Q^{\mathbb{C}}$ には標準的な Hermite 構造を入れたものを考えている. 一般に Kähler C-space 上の Hermite 構造は一意ではないが, 他の場合については (田丸が分からないため) ここでは深入りしない.

例 6.5 $F_{k_1, \dots, k_s}(\mathbb{R}^n) \subset F_{k_1, \dots, k_s}(\mathbb{C}^n)$ は実形.

6.3 Hermite 対称空間の実形

定理 6.4 から直ちに次が分かる:

命題 6.6 全ての対称 R-space は, ある Hermite 対称空間の実形である.

定理 6.7 Hermite 対称空間の全ての实形は, 定理 6.4 の方法で得られる. よって特に, Hermite 対称空間の実形は対称 R-space である.

与えられた Hermite 対称空間 M の実形は, 次の手順により分類できる:

- (1) M を与える第 1 種の複素階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ を取る.
- (2) \mathfrak{g} の実形 ℓ を全て書きだす.
- (3) 第 1 種階別 Lie 代数 $\ell = \ell^{-1} \oplus \ell^0 \oplus \ell^1$ を全て書きだす.
- (4) (3) の中で, 複素化が (1) と一致しているものを決定する. これに対応する対称 R-space は実形である.

例 6.8 $M = G_2(\mathbb{R}^{n+2}) \sim (= Q_n(\mathbb{C}))$ の実形は, 以下のいずれかである:

$$S^n, S^{n-1} \times S^1/\mathbb{Z}_2, S^{n-2} \times S^2/\mathbb{Z}_2, S^{n-3} \times S^3/\mathbb{Z}_2, \dots \quad (6.1)$$

参考文献

- [1] A. Arvanitoyeorgos, *An introduction to Lie Groups and the Geometry of homogeneous Spaces*. Student Mathematical Library, **22**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [2] A. Besse, *Einstein manifolds*. *Ergeb. Math.*, **10**. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] P. B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.
- [4] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Graduate Studies in Mathematics, **34**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] S. Kaneyuki and H. Asano, Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems. *Nagoya Math. J.* **112** (1988), 81–115.
- [6] A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*. Second edition. Progress in Mathematics, **140**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [7] A. L. Onishchik and È. B. Vinberg, *Lie Groups and Lie Algebras, III*. Structure of Lie groups and Lie algebras. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **41**. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras. *Hokkaido Math. J.* **8** (1979), 23–84.
- [9] H. Tamaru, The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups. *Diff. Geom. Appl.* **11** (1999), 29–38.
- [10] H. Tamaru, On certain subalgebras of graded Lie algebras. *Yokohama Math. J.* **46** (1999), 127–138.