階数が高い非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の構成*

田丸 博士　(広島大学 大学院理学研究科)

tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

概要

階数が高い非コンパクト型対称空間内の等質超曲面を, 統一的な方法で数多く構成する. 構成は, ある種の全測地的部分多様体内の等質超曲面を "拡張" することによって行われる.

1　導入

本稿の内容は, Jürgen Berndt 氏 (University College Cork, Ireland) との共同研究によって得られたものである.

我々の共同研究は, 全ての対称空間内の等質超曲面を分類することを目指している. (単連結) コンパクト型対称空間内の等質超曲面の分類は知られている ([2] は良くまとまったサーベイである). 階数 1 の非コンパクト型対称空間内の等質超曲面は, 我々の研究 ([6]) によって, 殆ど分類された (四元数の場合に残された問題があるが...).

そこで本稿では, 階数が高い (すなわち階数 2 以上の) 非コンパクト型対称空間内の等質超曲面を扱う. 特に, そのようなものを統一的な方法で数多く構成することが出来た. 我々の構成方法は, Lohnherr - Reckziegel ([9]) による, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質 ruled 極小超曲面の構成 (Section 3 で説明する) の類似である. 主定理をラフな形で述べると, 以下のようになる:

定理 1.1 M を非コンパクト型対称空間, M' を M 内のある種の全測地的部分多様体とする. このとき, M' の全ての等質超曲面は, M の等質超曲面に拡張できる.

リーマン多様体への等長的作用が cohomogeneity one であるとは, 最大次元の軌道の余次元が 1 となることを言う. 従って, 等質超曲面を考えることと cohomogeneity one action を考えることは同等である. 我々の定理は, 「M' への全ての cohomogeneity one action は, M への cohomogeneity one action に拡張できる」と言い換えることもできる. 証明は, 群作用の言葉を用いて与えられる.

我々の定理によって, 多くの (非加算無限個の) 等質超曲面が構成される. しかし残念ながら, 全ての等質超曲面がこの方法で得られる訳ではない. 分類問題に関しては, 現在も研究は継続中である.

* 名城大学研究集会「幾何構造と部分多様体の交差する領域」(2007/03/06–08) 講演予稿

2 例: ユークリッド空間

本稿の主定理の条件を満たす全測地的部分多様体の最も簡単な例として,

$$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2 := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}^3\}$$

が挙げられる．我々の定理の主張は, 「$\mathbb{R}^2$ の任意の等質超曲面は $\mathbb{R}^3$ の等質超曲面に拡張できる」ということである．ちなみに拡張は, 「各点に法空間をくっ付ける」という方法で与えられる．以下, 具体的に調べることにより, 定理の概要を説明する．

$\mathbb{R}^2$ の等質超曲面 (曲線) は, 直線と円に限る (このことは, 等質ならば曲率一定であることから証明できる)．合同を除くと, 次の 2 つの場合を調べれば良い:

(1) $X_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (直線),
(2) $X_2 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ (円).

それぞれに法空間 (すなわち z 軸) をくっ付けると, 出来上がったものは,

(1) $\widetilde{X}_1 = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ (平面),
(2) $\widetilde{X}_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = r^2,\ z \in \mathbb{R}\}$ (円柱)

となり, $\mathbb{R}^3$ 内の等質超曲面が構成された．勿論, $\mathbb{R}^3$ 内の全ての等質超曲面がこの方法で構成される訳ではない (実際, 球面は構成できない).

上の構成を, 群の立場から見てみよう．一般に $\mathbb{R}^n$ の (標準的な計量に関する) 等長変換群は,

$$I(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$$

である (回転と折り返しと平行移動で生成される群)．この群の積は (直積ではなく) 次で与えられることに注意する:

$$(a, v) \cdot (b, u) := (ab, au + v).$$

さらに, $\mathbb{R}^2$ の等長変換群は, $\mathbb{R}^3$ の等長変換で $\mathbb{R}^2$ を保つ群と一致している:

$$I(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid g \in \mathrm{O}(2) \right\} \ltimes \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

ここで $\mathbb{R}^2$ の等質超曲面が与えられたとしよう．その等質超曲面を軌道として持つ群 (すなわち cohomogeneity one として作用する群) を $H \subset I(\mathbb{R}^2)$ とする．ここで

$$\widetilde{H} := H \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

と定義する．このとき $\widetilde{H}$ は (H が何であろうとも) 群になることが, $I(\mathbb{R}^3)$ の積の定義から直ちに従う．群 $\widetilde{H}$ の $\mathbb{R}^3$ への作用は cohomogeneity one action であることも, 容易に確かめられる．この作用の軌道として $\mathbb{R}^3$ の等質超曲面が得られる．これらの例は, 我々の構成の基本的な原理を説明している．

3 例: 複素双曲空間

前節の $\mathbb{R}^3$ の等質超曲面の構成と同様の考え方で, 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の等質超曲面を構成する. ここで紹介する構成は Lohnherr-Reckziegel ([9]) によって与えられたものである. 後半で紹介する群論的な説明は Berndt ([1]) を参照.

まず初めに, 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の全測地的部分多様体 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を考える. 良く知られているように, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の horocycle γ は等質超曲面 (曲線) である. ここで γ を $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の等質超曲面に, 次の方法で拡張する: γ の各点 $\gamma(t)$ に, $\dot{\gamma}(t)$ および $J\dot{\gamma}(t)$ に直交する全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1}$ をくっ付ける (J は $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の複素構造). 構成された等質超曲面は, ruled かつ極小であることが知られている. この構成は, くっ付けるものが法空間では無いものの, 先に説明した $\mathbb{R}^3$ の等質超曲面の構成の類似と見ることができるであろう.

この構成を, 群 (リー代数) を用いて説明する. $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の等長変換群は $\mathrm{SU}(1,n)$ である. $\mathrm{SU}(1,n)$ のリー代数の岩沢分解を

$$\mathfrak{su}(1,n) = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$$

とすると, $\mathfrak{n}$ は $(2n-1)$ 次元 Heisenberg リー代数 (center は 1 次元), $\mathfrak{a}$ は 1 次元となることが良く知られている ($\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ は Damek-Ricci 空間である). リー代数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ に対応する $\mathrm{SU}(1,n)$ の連結部分群 AN は, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に単純推移的に作用する (すなわち $\mathbb{C}\mathrm{H}^n = AN$ と思って良い).

リー代数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ の基底 $\{A, X_i, Y_i, Z \mid i = 1, \ldots n-1\}$ として, 以下を満たすものが取れる:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a} = \mathbb{R}A, \quad \mathfrak{n} = \mathrm{span}\{X_i, Y_i, Z\}, \\
&[A, X_i] = (1/2)X_i, \quad [A, Y_i] = (1/2)Y_i, \quad [A, Z] = Z, \quad [X_i, Y_i] = Z.
\end{aligned}$$

特に書かれていない bracket は 0 と定義する ($\mathbb{R}Z$ は $\mathfrak{n}$ の center である). 複素構造 J は次で与えられる:

$$J(A) = Z, \quad J(X_i) = Y_i.$$

上で述べた $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面の構成を, リー代数 $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ を用いて述べよう. 全測地的 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, horocycle γ, くっ付ける全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1}$ に対応するリー代数は, それぞれ

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathrm{H}^2 &\longleftrightarrow \mathbb{R}A + \mathbb{R}X_1, \\
\gamma &\longleftrightarrow \mathbb{R}X_1, \\
\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1} &\longleftrightarrow \mathrm{span}\{A, X_i, Y_i, Z \mid i = 2, \ldots n-1\}
\end{aligned}$$

で与えられる ($\dot{\gamma}(0) = X_1$, $J\dot{\gamma}(0) = JX_1 = Y_1$ であることに注意). このことから, 構成された等質超曲面を軌道として持つ群 H のリー代数は,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}Y_1)$$

となる. ちなみに H の作用の軌道は, 全て余次元 1 である (特異軌道を持たない).

4　主定理

本節では, 主定理の主張を述べ, 証明の概略を紹介する．まずは主定理に登場する「ある種の全測地的部分多様体」を定義しよう．一言で言うと, Dynkin 図形の部分図形に対応する全測地的部分多様体である．

定義 4.1 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を非コンパクト型の対称対, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大部分空間, $Z \in \mathfrak{a}$ とする．このとき $\mathfrak{a}$ に関するルート空間およびルートベクトルを用いて,

$$\mathfrak{a}_Z := \sum_{\alpha(Z)=0} \mathbb{R} H_\alpha, \quad \mathfrak{p}^*_S := \mathfrak{a}_Z + \sum_{\alpha(Z)=0} \mathfrak{p}_\alpha, \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}^*_S := [\mathfrak{p}^*_S, \mathfrak{p}^*_S] + \mathfrak{p}^*_S$$

と定める．$\mathfrak{g}^*_S$ に対応する部分群の原点を通る軌道を, $Z \in \mathfrak{a}$ に対応する全測地的部分多様体と呼ぶ．

この全測地的部分多様体は次のように幾何学的に説明することもできる．Z を初期ベクトルとする測地線を γ としたとき, γ に平行な測地線の和集合は全測地的部分多様体になる．その半単純部分が, Z に対応する全測地的部分多様体である．詳細は [7] p141, Proposition 2.20.10 を参照.

Z に対応する全測地的部分多様体 M_Z は, Dynkin 図形の部分図形に対応する．単純ルート系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を, $\alpha_i(Z) \geq 0$ となるように選ぶ．このとき, $\mathfrak{g}^*_S := [\mathfrak{p}^*_S, \mathfrak{p}^*_S] + \mathfrak{p}^*_S$ は M_Z に対応する Cartan 分解を与え, $\{\alpha \mid \alpha(Z) = 0\}$ は M_Z のルート系である．更に, $\{\alpha_i \mid \alpha_i(Z) = 0\}$ は M_Z の単純ルート系となる．すなわち, M_Z の Dynkin 図形は, M の Dynkin 図形から頂点をいくつか抜いたものとなる．逆に, Dynkin 図形 Λ の部分図形 Λ' から M_Z を構成するには, $\Lambda' = \{\alpha_i \mid \alpha_i(Z) = 0\}$ となる Z を取れば良い.

定理 4.2 上の記号を引き続き使う．M を非コンパクト型対称空間, M_Z を $Z \in \mathfrak{a}$ に対応する全測地的部分多様体とする．このとき, M_Z への任意の cohomogeneity one action は, M への cohomogeneity oen action に拡張できる．

証明はそれ程難しくない．M に対応するリー代数の岩沢分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

とする. 群 H が M_Z に cohomogeneity one で作用しているとする．このとき M_Z の等長変換群のリー代数は $\mathfrak{g}^*_S$ に他ならないので, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^*_S$ である．ここで

$$\widetilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} + (\mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}_Z) + \sum_{\alpha(Z) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

と定義する (足してる部分が法空間に対応する)．ルート空間の bracket に関する性質から, $\widetilde{\mathfrak{h}}$ は部分リー代数であることが示される．さらに, $\mathfrak{h}$ の M_Z への作用の原点での slice 表現と, $\widetilde{\mathfrak{h}}$ の M への作用の原点での slice 表現が一致することが分かる．よって cohomogeneity も保たれる．

5 例

例として, 階数 2 の複素グラスマン多様体の非コンパクト双対

$$M = \mathrm{SU}(2, n+2)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n+2))$$

を考える. M は階数 2 の対称空間であり, その Dynkin 図形は重複度を込めて

$$\begin{array}{ccc} (2) & & (2n,1) \\ \circ & \Longleftrightarrow & \circledcirc \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$$

である. この部分図形は $\{\alpha_1\}$ と $\{\alpha_2\}$ の 2 通り. それぞれに対応する全測地的部分多様体は,

$$M' = \mathbb{R}\mathrm{H}^3,\ \mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$$

である. 主定理より, $\mathbb{R}\mathrm{H}^3$ または $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ 内の任意の等質超曲面は, M の等質超曲面に拡張できる. $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ には非可算無限個の等質超曲面が存在するので, 必然的に M 内の非可算無限個の等質超曲面が構成されたことになる.

階数が高い非コンパクト型対称空間に対して, 焦点部分多様体を持たない等質超曲面が非加算無限個存在することは, 我々の以前の研究で既に分かっていた ([4]). 今回の主定理の帰結として, 焦点部分多様体を持つ等質超曲面も, 階数が高い場合には, 一般に非加算無限個存在することが分かった (重複度が低い場合に例外あり).

この構成は, 階数 1 の場合と階数が 2 以上の場合で, 様相が大きく異なることを示唆している. 階数 1 の非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の分類 ([6]) に於いてキーポイントとなった考察は, 「cohomogeneity one action が全測地的軌道を持たない場合, 特異軌道の法空間は一つのルート空間に含まれる」というものであった (分類は, ルート空間の中の所定の線型部分空間を分類する問題に帰着された). しかし上記の性質は, 階数が 2 以上の場合には成立しない. 例えば, $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$ 内の全測地的 $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}$ は, cohomogeneity one action の特異軌道である (別の言い方をすると, $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}$ の周りの tube は等質超曲面である). $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}$ の法空間は 2 つのルート空間にまたがる. 一方で, $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n+1}$ の周りの tube を拡張して得られた M 内の等質超曲面を考えると, 特異軌道の法空間は (拡張によって保たれるので), やはり 2 つのルート空間にまたがっている. しかしながら, M 内での特異軌道は全測地的にはならない.

階数が高い非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の分類には, 放物型部分群, あるいは (殆ど同値な概念だが) リー代数の gradation が有効であろうと考えている. $Z \in \mathfrak{a}$ に対応する全測地的部分多様体を考えることは, Z によって決まる gradation $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ (ad_Z による固有空間分解と思って良い) を考えることに一致する (0 以上の固有値の固有空間の和が放物型部分リー代数である). ルート空間分解では分解が細かすぎるので, gradation のような粗い分解の方が使い勝手が良いように思われる.

参考文献

[1] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589-600.

[2] J. Berndt, On homogeneous hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces, in: *Proceedings of the Second International Workshop on Differential Geometry, Taegu, December 19-20, 1997* (Basic Science Research Institute, Taegu, 1998), 17–34.

[3] J. Berndt and M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.

[4] J. Berndt and H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **63** (2003), 1-40.

[5] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, *Tôhoku Math. J.* **56** (2004), 163-177.

[6] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[7] P.B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1996.

[8] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 571-612.

[9] M. Lohnherr and H. Reckziegel, On ruled real hypersurfaces in complex space forms, *Geom. Dedicata* **74** (1999), no. 3, 267–286.

[10] H. Tamaru, The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups, *Diff. Geom. Appl.* **11** (1999), 29–38.