非コンパクト等質 Einstein 多様体について

田丸 博士　（広島大学大学院理学研究科）
tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp

幾何学阿蘇研究集会（2006/09/10–13）講演資料

1 Introduction

- 漠然とした問題：
  - 多様体は, いつ「良い」「構造」（e.g., リーマン計量）を持つか？
  - 「良い」「構造」を持つ多様体は, どれくらいあるか？
- 今回の話題：非コンパクト等質 Einstein 多様体
  - 非コンパクト等質空間 G/H は, いつ G-不変 Einstein 計量を持つ？
    （G, H の群論的性質と関係？）
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体 $(G/H, g)$ は, どれくらいあるか？
    （コンパクトの場合と違って, 連続的に存在）
- 今回の講演の目標：
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体の有名な例の紹介
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体の新しい構成法の紹介
  - 今後の問題と課題（moduli）
- 群論的性質との関連：Einstein $\Rightarrow$ 可解？
  - Alekseevskii 予想「非コンパクト等質 Einstein $\Rightarrow$ 可解多様体？」
    （i.e., 等長的かつ推移的に作用する可解群が存在）
    （参考 ([Heintze 1974]): 等質, 負曲率 $\Rightarrow$ 可解）
- 簡単な例 1： ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は, 非コンパクト等質 Einstein;

$$M(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n \supset S := \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n \quad \text{：推移的}$$

- 簡単な例 2： 双曲平面 $\mathbb{R}H^2$ は非コンパクト等質 Einstein;

$$SL_2(\mathbb{R}) \supset S := \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \curvearrowright \mathbb{R}H^2 \quad \text{：推移的}$$

- 本講演では, 単連結の場合のみを考える：
  - (S, g), ここで S は単連結可解群, g は左不変リーマン計量

– 内積付き可解リー環 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ を考えれば良い
– リー環 $\mathfrak{s}$ が可解 $:\Leftrightarrow \mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ が巾零

- 研究の手法など：
  - Ricci 曲率は（原理的には）リー環で計算できる
    （Ricci 曲率は, ad, ad*, $\langle , \rangle$ を用いて表せる）
    （しかし, 正規直交基底に関して和を取ったりして, 式は複雑）
  - $\mathfrak{s}$ の代数構造が複雑（e.g., $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ の step 数が大きい）な場合, 計算は難しい
  - 与えられた $\mathfrak{s}$ 上の Einstein 計量を見付けることは, 難しい

2　Known Examples（パターン１）

- 良い幾何を持つもの：
  - 非コンパクト型対称空間
  - 非コンパクト等質 Kähler-Einstein 多様体
  - 四元数 Kähler 可解多様体
- 非コンパクト型対称空間 (M, g) について：
  - 岩沢分解を通して可解群と同一視できる　$(M = G/K \cong AN)$
    （$G = KAN$ は岩沢分解; K は極大コンパクト, A は可換, N は巾零）
  - 岩沢分解の例: $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) + [\text{対角行列}] + [\text{上三角行列}]$
  - 系.　$\mathfrak{s} := [\text{対角行列}] + [\text{上三角行列}]$ は Einstein 計量を持つ

3　Known Examples（パターン２）

- 良い巾零リー環 $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ の "可解拡大"
  - 可解拡大とは, $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$（半直積）という操作
  - Damek-Ricci space $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$:= generalized Heisenberg 群の（所定の）1 次元可解拡大
    （$\mathfrak{s} = \mathbb{R}A + \mathfrak{n}$,　ここで A は canonical に定まる）
  - generalized Heisenberg リー環 $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ とは,
    Clifford 代数の表現から構成される 2-step 巾零リー環
  - 例.　古典的な Heisenberg リー環の場合,

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{s} := \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} + \mathfrak{n} \quad (\cong \mathbb{C}H^2)$$

- 半単純リー環の gradation から得られる巾零リー環
  - 半単純リー環の分解 $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ が gradation $:\Leftrightarrow [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$
  - $\mathfrak{n} := \sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ は巾零リー環

- 例. 行列のブロック分割から, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の gradation が得られる, e.g.,

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array}\right]$$

- 森邦彦 ([3]). 古典型複素単純リー環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の 2 階の gradation に対し, $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ は Einstein 可解拡大を持つ
- T ([4]). 全ての $\mathfrak{g}$ の 全ての 2 階と 3 階の gradation に対し, $\mathfrak{n}$ は Einstein 可解拡大を持つ

• パターン 2 が使えるのは, $\mathfrak{n}$ の step 数が小さいか, 次元が低い場合のみ...

4 New Method

• 部分多様体に着目：

- $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ が Einstein のとき, 部分環 $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s}$ が（誘導計量に関して）$\mathrm{ric}^{\mathfrak{s}'} = \mathrm{ric}^{\mathfrak{s}}|_{\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}'}$ （Ricci-equivalent?）を満たせば, 自動的に Einstein

• 主結果：

- 全ての半単純リー環の全ての gradation $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ に対し, $\mathfrak{n} := \sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ は Einstein 可解拡大を持つ

• 証明の方針：

- gradation と適合する岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ を取る（$\mathfrak{n} \subset \overline{\mathfrak{n}}$）
- $\mathfrak{a} \subset \overline{\mathfrak{a}}$ も上手く取る
  （実はこれは, 放物型部分環 $\mathfrak{p} := \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ の Langlands 分解）
  （"generalized 岩沢分解" と呼ばれるものとも, 大体一致）
- $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ は, 対称空間 $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ の Ricci-equivalent な部分環

5 Comments

• 主結果に関して：

- $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{s}'$ は, 全測地的ではない, むしろ全測地的部分多様体の補空間
- $\mathfrak{n}$ は任意の step 数を取りえる （→代数構造が複雑）（ただし $\mathfrak{n}$ の step 数は, 対称空間の $\overline{\mathfrak{n}}$ の step 数より減る）
- 多くの例が構成された（$\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ には, 約 2^r 個の gradation, ここで $r := \dim \overline{\mathfrak{a}}$）（しかし, 離散的）

• 当然考えるべき問題：

- 各対称空間 $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ の Ricci-equivalent な部分環はどのくらいある？
- Damek-Ricci space の Ricci-equivalent な部分環は？
- そのような部分環が連続的に存在する？(→ moduli)
- 等質でない Ricci-equivalent 部分多様体は存在する？

6 Moduli

- Einstein 可解多様体の moduli は, 一般に次元が高い（と思われる）
  - $\{(\mathfrak{g}, \langle,\rangle) \mid \mathfrak{g}$ は n-dim リー環 $\}/\mathrm{isom}$
    $\cong \{\mu \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \mid$ Jacobi 律 $\}/\mathrm{O}(n)$
    $\supset \{\mu \mid$ Jacobi 律, 可解, Einstein$\}/\mathrm{O}(n)$ ：moduli space
  - $\mathbb{R}H^n$, $\mathbb{C}H^n$ は孤立点　（代数構造が簡単すぎるから？）
  - $\mathbb{H}H^n$ $(n \geq 3)$ の近傍で, moduli の次元は正
- 関連した問題：
  - Ricci-equivalent な部分環は, 連続的に存在するか？(→ 変形の具体的な記述）
  - 変形できるための障害？
  - リー群上に左不変 Einstein 計量が存在するための障害？　（位相的な障害は期待できない... 代数構造に付随した障害？）

7 まとめ

- 大きな問題:
  - 等質空間上の Einstein 計量の存在 $\leftrightarrow$ 群論的な条件, 制約？
- 結果：
  - 対称空間（または半単純リー群）に上手く入ってるくらい良い可解群ならば, 左不変 Einstein 計量を持つ
  - 手法は, 部分多様体論　（Ricci-equivalent）
- 経験則：
  - 可解群は, いろいろと面白い例を供給する
    （cf. また, Levi 分解より, 可解群を調べることは自然でもある）

参考文献

[1] J. Heber, Noncompact homogeneous Einstein spaces, *Invent. Math.* **133** (1998), 279–352.

[2] J. Lauret, Minimal metrics on nilmanifolds, *Diff. Geom. Appl.* Proc. Conf. Prague, August 30 – September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 79–97.

[3] K. Mori, Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci-type solvable Lie groups, *Osaka J. Math.* **39** (2002), 345–362.

[4] H. Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, preprint.

[5] H. Tamaru, A class of noncompact homogeneous Einstein manifolds, *Diff. Geom. Appl.* Proc. Conf. Prague, August 30 – September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 119–127.

[6] H. Tamaru, Parabolic subgroups and Einstein solvmanifolds, in preparation.