

Cohomogeneity one actions on symmetric spaces

田丸 博士 (広島大学理学研究科)

0 要約

本稿では, 対称空間への cohomogeneity one action に関する話題を取り扱う. 特に, 非コンパクト型既約対称空間への cohomogeneity one action に関する筆者と Jürgen Berndt 氏 (University College Cork, Ireland) の共同研究 ([5], [6], [7]) の結果について解説し, 今後の問題および応用について述べることを目標とする. 我々の共同研究の内容に関しては [33], [34], [35] も参考になるかと思う.

1 導入

リーマン多様体への等長的作用が cohomogeneity one action であるとは, その非特異軌道の余次元が 1 となることである. ここで, 非特異軌道とは次元が最大の軌道のことであり, そうでない軌道を特異軌道と呼ぶ. 我々は, 対称空間への cohomogeneity one action を分類することを目標としている. 分類は, 次の同値関係の元で行う: リーマン多様体 M に H および H' が等長的に作用しているとき, これらの作用が orbit equivalent であるとは, 全ての H -軌道を H' -軌道に移す等長変換が存在すること. ここで定義した orbit equivalent という同値関係は, 作用している群が共役であるという同値関係より弱い. 例えば, $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ への $SO(2n)$ および $U(n)$ の作用 (明らかに cohomogeneity one action である) は orbit equivalent だが, 作用している群は次元すら異なる.

我々が目標としている cohomogeneity one action の分類は, 等質超曲面の分類と同値である. ここで, 等質とは等長変換群の部分群の軌道となっていることを意味する (正確には extrinsically homogeneous と呼ばれる). 一般に cohomogeneity one action が与えられたときその非特異軌道は等質超曲面であり, 逆に等質超曲面が与えられたとき, 等長変換群の中での normalizer を取ればその作用は cohomogeneity one である. さらに, cohomogeneity one action は一つの軌道だけから (orbit equivalent を除いて) 決まることが知られている.

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への cohomogeneity one action は E. Cartan ([11]) によって分類された. 実は Cartan は \mathbb{R}^n の主曲率一定超曲面を分類しており, 結果としてそれらは全て等質であるので, cohomogeneity one action の分類が得られたことになる (等質超曲面は主曲率一定である). また同様の方法で実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ への cohomogeneity one action の分類も得られている. しかしながら, この方針で一般の対称空間への cohomogeneity one action を分類することは絶望的である. 等質超曲面の分類よりも主曲率一定超曲面の分類の方が遥かに難易度が高く, 実際, 球面の主曲率一定超曲面の分類も未だ得られていない.

球面 S^n への cohomogeneity one action は, Hsiang-Lawson ([18]) によって分類された. S^n への cohomogeneity one action を分類する為には, コンパクトリー群の \mathbb{R}^{n+1} への表現で cohomogeneity two のものを分類すれば良く, 実はそのような表現は, 階数 2, 次元 $n+1$ の対称空間のイソトロピー表現と orbit equivalent になる. 一般のコンパクト型既約対称空間への cohomogeneity one action は, Kollross ([22]) によって分類されている. 彼の分類の方針を非常に大雑把に述べると, 等長変換群がコンパクト半単純リー群であり, その極大部分群の分類が知られている, ということを最大限に利用するものである. コンパクトリー群の極大連結部分群は有限個であるので, ある程度判定条件で絞っておいて, 最終的には case by case に調べることが可能である. またこのことから容易に分かるように, コンパクト対称空間への cohomogeneity one action は有限個である.

我々の目標は, 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の分類である. 非コンパクトの場合はコンパクトの場合と様相が全く異なり, 同様の方針で証明することはやはり絶望的である. 非コンパクト型対称空間の等長変換群は非コンパクトリー群であり, そこには互いに共役でない非可算無限個の極大連結部分群が存在する. 実際, 後で述べるように, 非コンパクト型対称空間は (少数の例外を除いて) 非可算無限個の cohomogeneity one action を持つ.

2 例

この節では対称空間への cohomogeneity one action の例をいくつか紹介する. 例は, 等長変換群の良い部分群を取ってくることによって構成される.

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の場合, その等長変換群の連結成分は $G := \mathrm{SO}(n) \cdot \mathbb{R}^n$ である. 容易に分かるように, \mathbb{R}^{n-1} の作用は cohomogeneity one であり, この場合には全ての軌道は非特異になる. また, 部分群 $\mathrm{SO}(k) \cdot \mathbb{R}^{n-k}$ (当然 $\mathrm{SO}(k)$ と \mathbb{R}^{n-k} は compatible な位置にあるとする) の作用も cohomogeneity one であり, その特異軌道は \mathbb{R}^{n-k} , 非特異軌道はシリンダー $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ である. 多少恣意的にまとめると, 次のようになる:

- (i) \mathbb{R}^n の余次元 1 の部分群の作用を取ると, 全ての軌道が非特異な cohomogeneity one action が出来る.
- (ii) \mathbb{R}^n の適当な部分群と適当なコンパクト群を組み合わせると, 特異軌道を持つ cohomogeneity one action が出来る.

これらの例は非常に単純であるが, 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の構成の本質を表している.

非コンパクト型対称空間 M の等長変換群の連結成分の岩沢分解を $G = KAN$ で表す. 先のユークリッド空間の等長変換群の $\mathrm{SO}(n)$ の部分と K を, \mathbb{R}^n の部分と AN を, それぞれ対応させて考える. すなわち, 例を構成する為に,

- (i) AN の余次元 1 の部分群の作用を考える,

(ii) AN の適当な部分群と適当な K の部分群を組み合わせた群の作用を考える.

因みに AN は M に単推移的に作用するので, (i) のような部分群を取ってくるとその作用は常に cohomogeneity one である. (ii) の場合には, cohomogeneity one になる為にはさらに条件が必要である.

簡単の為, $\text{rank}(M) = 1$ の場合を考える (以下のような例は階数に依らずに構成できる). この場合, 等長変換群の連結成分の岩沢分解を $G = KAN$ で表すと, AN のリー環は $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ と書ける (実双曲空間の場合は $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ である).

まず (i) に対応する cohomogeneity one action の構成を紹介する (詳細は [3] を参照). 単位ベクトル $A_0 \in \mathfrak{a}$, $U \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対し, $\xi := (\cos \theta)U + (\sin \theta)A_0$ とすると, $\mathfrak{s} \ominus \mathbb{R}\xi$ は \mathfrak{s} のリー部分環となる. 対応する AN の連結部分群の作用を考えることによって, cohomogeneity one action が構成出来た. ここで, $\theta = \pi/2$ の場合は N の作用に他ならず, この場合の軌道は horosphere である. 一方 $\theta = 0$ の場合の原点を通る軌道は ruled な超曲面になっている (因みに実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ で $\theta = 0$ に対応する等質超曲面は, 全測地的 $\mathbb{R}H^{n-1}$ である). また, θ を動かすことにより, これらの等質超曲面の間の等質性を保った変形が得られたことになる. 実は, $\theta \in [0, \pi/2)$ の場合に得られた cohomogeneity one action は全て orbit equivalent である (この範囲での変形は, 等質超曲面の法測地線に沿った平行移動に他ならない).

次に (ii) に対応する cohomogeneity one action の構成を紹介する (詳細は [4] を参照). ここでは複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の場合を考える. この場合, \mathfrak{n} は Heisenberg リー環である. $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$ の複素正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ を取り, 例えば,

$$\mathfrak{v}_0^\perp := \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, (\cos \theta)ie_1 + (\sin \theta)e_2\}$$

という部分空間を考える. すると $K = U(n)$ の中での \mathfrak{v}_0^\perp の normalizer K' は, \mathfrak{v}_0^\perp の単位球に推移的に作用する. 容易に分かるように $\mathfrak{k}' + \mathfrak{a} + \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ は部分リー環であり, 対応する AN の連結部分群の作用は cohomogeneity one になる (K' の \mathfrak{v}_0^\perp への作用が slice 表現に他ならない). $\theta = 0$ の場合, 特異軌道は全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}$ であり, 非特異軌道はその周りの tube になる. それ以外の場合, 特異軌道は全測地的でない等質極小部分多様体となる.

3 分類

一般にリーマン多様体 M への cohomogeneity one action が与えられたとき, [27] により, その orbit space は次のいずれかに位相同型になることが知られている: S^1 , \mathbb{R} , $[0, 1]$, $[0, +\infty)$. 以降, M を非コンパクト型既約対称空間とする. この場合に, 上記の orbit space のうちどれが起こり得るかを調べることによって, 次の定理が示される:

定理 3.1 ([4]) 非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の orbit space は, \mathbb{R} または $[0, \infty)$ に位相同型. 前者の場合, 与えられた cohomogeneity one action は特異軌道を持たない (全ての軌道が非特異, すなわち超曲面になる). 後者の場合, 特異軌道の一つだけ持つ.

さらに, リーマン多様体への cohomogeneity one action の特異軌道は極小部分多様体である. 我々の目標は非コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の分類である. その為に, 上記の定理を鑑みて, 次のような場合分けをする:

- (1) 全ての軌道が非特異になる場合,
- (2) 全測地的な特異軌道を持つ場合,
- (3) $\text{rank}(M) = 1$ で, 全測地的でない極小な特異軌道を持つ場合,
- (4) $\text{rank}(M) > 1$ で, 全測地的でない極小な特異軌道を持つ場合.

分類の為の戦略は, 「それぞれの場合の幾何的な条件から, 作用する群に制約を加える」というものである. これによって, (1), (2) の場合には完全な分類を得た. また (3) の場合にも進展が得られた. (4) の場合は, 非可算無限個の例を構成することが出来ているが, 分類にはまだ遠い.

以下, それぞれの場合に個別に議論していくが, 多くの場合で次の定理が重要な役割を果たす:

定理 3.2 (Cartan's fixed point theorem) 完備単連結で非正断面曲率を持つリーマン多様体へのコンパクト群の等長的作用は, 固定点を持つ.

負の断面曲率を持つ等質空間は可解多様体であることが, Heintze ([17]) により示されている. 負の断面曲率を持つ等質空間を M , その等長変換群を G とすると, Levi 分解や岩沢分解を通して G はコンパクト群 K と可解群 S の半直積として表せる. ここで K の M への作用の固定点を p とすると, 等質性の仮定より $M = S \cdot p$, すなわち M は可解多様体である. 我々の cohomogeneity one action の分類に於いても, これと同様の議論を行う.

3.1 全ての軌道が非特異になる場合

M を非コンパクト型対称空間, H が M に cohomogeneity one action として作用し, 特異軌道を持たないものとする (この場合 H の軌道の全体は M 上の foliation を成す). このとき, H の形に制約がかかるのだが, Cartan's fixed point theorem を用いた議論により, 「ある軌道に推移的に作用する H の可解部分群 S が存在する». すると S の M への作用は余次元 1 の軌道を持つので cohomogeneity one になる. ところが, cohomogeneity one action は一つの軌道で決定されるので, H の作用と S の作用は orbit equivalent である. すなわち, 「 H は可解群として良い». さらに, H の次元や M の等長変換群の極大可解部分群の分類を駆使することにより, 次が得られる:

定理 3.3 ([5]) M を非コンパクト型対称空間, その等長変換群の連結成分 G の岩沢分解を $G = KAN$ で表す. H の M への cohomogeneity one action が特異軌道を持たない時, H は AN の余次元 1 の部分群と orbit equivalent である.

よって、この場合の分類を得る為には、「 AN の余次元 1 の部分群の分類」および「それらの作用のうち、どれとどれが orbit equivalent であるかの判定」をすれば良い（因みに後者は case by case の議論を行わなくてはならない部分もあり、非常に複雑である）。分類は次で与えられる：

定理 3.4 ([5]) 非コンパクト型対称空間 M への特異軌道を持たない cohomogeneity one action の orbit equivalent class の全体は、

$$(\mathbb{R}P^{r-1} \cup \{1, \dots, r\})/\text{Aut}(DD)$$

と 1:1 に対応する。ここで $r := \text{rank}(M)$, また $\text{Aut}(DD)$ は M の制限ルート系の Dynkin diagram の自己同型群。

特に $r = 1$ のとき、すなわち $M = \mathbb{R}H^n, \mathbb{C}H^n, \mathbb{H}H^n, \mathbb{O}H^2$ の場合、特異軌道を持たない cohomogeneity one action は 2 つだけである。ちなみに $\mathbb{R}H^n$ の場合には、一方は horosphere による foliation, 他方の軌道は全測地的 $\mathbb{R}H^{n-1}$ とその equidistant hypersurface である。

3.2 全測地的な特異軌道を持つ場合

この場合に、作用する群にかかる制約は非常に強い。対称空間の全測地的部分多様体は対称空間であり、作用する群は（適当に orbit equivalent なものを取れば）対称空間の等長変換群になる。このことから、対称空間の双対性を用いて、コンパクト型対称空間の場合に議論を帰着させることが出来る。

定理 3.5 ([6]) M を非コンパクト型対称空間, M^* をその単連結なコンパクト双対とする。このとき、 M への cohomogeneity one action の全測地的特異軌道の全体と、 M^* への cohomogeneity one action の全測地的特異軌道の全体は、対称空間の双対によって 1:1 に対応する。

コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action の分類は知られているので、その中で全測地的軌道を持つものを決定すれば良いことになる。勿論その判定は容易ではなく、Leung によるコンパクト型対称空間の reflective 部分多様体の分類 ([23], [24]) などを用いて、最終的に残されたものについては case by case に判定して行われる。分類定理は以下の通り：

定理 3.6 ([6]) 非コンパクト型既約対称空間 M の全測地的部分多様体 F で、cohomogeneity one action の特異軌道となるものは、次で分類される：

- (1) F は M の reflective submanifold で $\text{rank}(F^\perp) = 1$ をみたすもの、
- (2) $G_2^2/\text{SO}(4) \subset G_3^*(\mathbb{R}^7) = \text{SO}^o(3, 4)/\text{SO}(3)\text{SO}(4)$,
- (3) $G_2^{\mathbb{C}}/G_2 \subset \text{SO}(7, \mathbb{C})/\text{SO}(7)$,

- (4) $\mathbb{C}H^2 \subset G_2^2/\mathrm{SO}(4)$,
- (5) $SL(3, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(3) \subset G_2^2/\mathrm{SO}(4)$,
- (6) $SL(3, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(3) \subset G_2^{\mathbb{C}}/G_2$.

コンパクト型対称空間への cohomogeneity one action が有限個であるので, 非コンパクト型対称空間への全測地的特異軌道を持つ cohomogeneity one action は有限個である.

3.3 $\mathrm{rank}(M) = 1$ で全測地的でない極小な特異軌道を持つ場合

非コンパクト型対称空間 M への H の作用が cohomogeneity one であり, 全測地的でない特異軌道を持つとする. このとき, 全ての軌道が非特異である場合と同様の議論によって, 特異軌道に推移的に作用する H の可解部分群 S が存在することが分かる. さらに群 H の形に制約を加える為, ここでは $\mathrm{rank}(M) = 1$ の場合を考える. 階数で議論を分ける理由は, 次の定理にある:

定理 3.7 ([1]) 階数 1 の非コンパクト型対称空間 M への等長的作用は, 次のいずれかを満たす: (i) 全測地的軌道を持つ, または, (ii) 境界 $M(\infty)$ 上に固定点を持つ.

ここで M の境界 $M(\infty)$ とは, M の漸近測地線の適当な同値類の全体である (M の等長変換群は $M(\infty)$ に自然に作用する). 境界上のある点での固定部分群は K_0AN と共役であることが知られている. ここで, $G = KAN$ は M の等長変換群の連結成分の岩沢分解, K_0 は K の中で A の centralizer である.

H の M への作用が cohomogeneity one で, 全測地的でない特異軌道を持つと仮定する. このとき, H の作用は全測地的軌道を持たないことが分かり, 上の定理より境界上に固定点を持つ, すなわち $H \subset K_0AN$ として良い. さらに, K_0AN の部分群で M への作用が cohomogeneity one である為の条件を調べることにより, 次を得る:

定理 3.8 ([7]) M を階数 1 の非コンパクト型対称空間, 等長変換群のリー環の岩沢分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ とし, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を α に関するルート空間分解とする. \mathfrak{g}_α の部分空間 \mathfrak{v}_0 が次の条件

$$(*) K_0 \text{ の部分群 } K' \text{ が } \mathfrak{v}_0^\perp := \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{v}_0 \text{ の単位球に推移的に作用する}$$

を満たすとき, $\mathfrak{h}(\mathfrak{v}_0^\perp) := \mathfrak{k}' + \mathfrak{a} + \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ に対応する連結リー群の M への作用は cohomogeneity one action である. 逆に, M への cohomogeneity one action で全測地的でない特異軌道を持つものは, 全てこの方法で得られる. また, この方法で得られた $\mathfrak{h}(\mathfrak{v}_0^\perp)$ と $\mathfrak{h}(\mathfrak{v}_1^\perp)$ に対応する cohomogeneity one action が orbit equivalent である為の必要十分条件は, \mathfrak{v}_0^\perp と \mathfrak{v}_1^\perp が K_0 の作用で共役となること.

すなわち, $M = \mathbb{R}H^n, \mathbb{C}H^n, \mathbb{H}H^n, \mathbb{O}H^2$ への cohomogeneity one action で全測地的特異軌道を持たないものを分類する為には, 次の表現に関して, 条件 (*) を満たす部分空間を分類すれば良い:

$$K_0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{SO}(n-1) \\ \text{U}(n-1) \\ \text{Sp}(1)\text{Sp}(n-1) \\ \text{Spin}(7) \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{v}_0^\perp = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n-1} \\ \mathbb{C}^{n-1} \\ \mathbb{H}^{n-1} \\ \mathbb{R}^8 \end{array} \right\}.$$

ここで $\text{Spin}(7)$ は \mathbb{R}^8 にスピンの表現で作用している.

\mathbb{R}^{n-1} の場合, このような部分空間 (の K_0 による共役類の全体) の決定は容易である. 任意の次元の部分空間は条件 (*) を満たし, また同じ次元の部分空間は $\text{SO}(n-1)$ の作用で共役である. さらに, 対応する cohomogeneity one action を考えると, それらの作用の特異軌道は全測地的である. すなわち, $\mathbb{R}H^n$ への cohomogeneity one action の特異軌道は全測地的である (これは Cartan による $\mathbb{R}H^n$ の等質超曲面の分類の別証明を与えている).

\mathbb{C}^{n-1} の場合, このような部分空間の全体と Kähler angle が一定の部分空間が 1:1 に対応する. Kähler angle は $[0, \pi/2]$ の任意の値を取る為, 特異軌道を持つ $\mathbb{C}H^n$ への cohomogeneity one action は非加算無限個存在する (ただし $n \geq 3$ のとき).

3.4 $\text{rank}(M) > 1$ で全測地的でない極小な特異軌道を持つ場合

階数 1 の場合の分類のポイントは, 作用する群は K_0AN の部分群である, ということであった. 階数が高い場合にも, K_0AN の部分群を考えることによって, 全測地的でない特異軌道を持つ cohomogeneity one action を構成できる. しかし実は, 一般の階数の場合には, 定理 3.8 は成立しない. 反例が構成出来る ([8]).

4 応用と今後の問題

4.1 超曲面の主曲率

超曲面が与えられたとき, その主曲率を計算せよ, というのは基本的な問題であると思われる. 球面の等質超曲面の主曲率は高木-高橋 ([32]) によって計算されており, 例えば主曲率の個数は 1, 2, 3, 4, 6 のいずれかである, などという性質が知られている. 一般の対称空間の等質超曲面の主曲率の個数や重複度にはどのような制約があるだろうか.

我々は, 非コンパクト型対称空間への特異軌道を持たない cohomogeneity one action に対し, その軌道として現れる超曲面の主曲率を完全に決定した ([5]). その具体的な記述はここでは省略するが, 計算結果より次が示される (cf, [31]):

命題 4.1 ([5]) 非コンパクト型対称空間 M に対し, (i) $\text{rank}(M) \geq 2$ のとき, M には全ての leaf が極小な余次元 1 の foliation が存在する, (ii) $\text{rank}(M) \geq 3$ のとき, 主曲率も重複度も一致するが共役でない等質超曲面が存在する.

例えば、球面の等質超曲面は主曲率と重複度が一致すれば共役であった。この定理から、階数の高い非コンパクト型対称空間では、主曲率と重複度だけでは超曲面は区別できないことを意味する。定理 3.4 の証明に於いて、orbit equivalence の判定が困難であった理由はここにある。与えられた等質超曲面が共役で無いことを示す為には、主曲率などの幾何的不変量だけでは不十分なのである (実際、証明ではリー環の代数的不変量を用いている)。

4.2 非コンパクト等質 Einstein 多様体

現在までに知られている非コンパクト等質 Einstein 多様体は、全て可解多様体 (可解群が等長的かつ推移的に作用する多様体) である。最近の Heber ([16]) の論文に於いて Einstein 可解多様体は深く研究されており、特に Einstein 可解多様体の moduli 空間の次元は十分に大きいことが示された。非コンパクト型対称空間は Einstein 可解多様体の典型例である。また、最近筆者は [36] に於いて、非コンパクト型対称空間の等質部分多様体で Einstein になるものを数多く構成した。因みに CH^n は Einstein 超曲面を持たないことが知られているが、階数が 2 以上の非コンパクト型対称空間は Einstein 等質超曲面を持つことが分かる (この事実が明記されている論文を知らないが、Wolter ([37]), Heber ([16]) および我々の結果 ([5]) を組み合わせると容易に導かれる)。非コンパクト型対称空間の等質超曲面で Einstein となるものはどのくらい存在するだろうか。もし特異軌道を持つ cohomogeneity one action の非特異軌道で Einstein になるものが存在すれば、Alekseevskii 予想 (非コンパクト等質 Einstein 多様体は可解多様体である、という予想) の反例を与える可能性がある。

4.3 Cohomogeneity one 多様体

リーマン多様体 (M, g) が cohomogeneity one 多様体 であるとは、等長変換群の M への作用が cohomogeneity one であることを言う。このような cohomogeneity one 多様体の研究は最近活発であり、Einstein 多様体 ([2]), 例外ホロノミー群を持つ多様体 ([10], [26]), 正の断面曲率を持つ多様体 ([15]) など、興味深いリーマン多様体の例を供給している。

何らかの幾何構造を持つ多様体を構成するとき、まず等質空間を考えるのは自然である。例えばコンパクト型対称空間に対し、等長変換群より小さい群が推移的に働いているとする (cohomogeneity zero action である)。この場合、対称空間としての計量ではない等質リーマン計量が存在する可能性がある。そのような計量は実際に存在し、等質 Einstein 多様体の例を供給する ([38], [21])。このような研究は、対称空間への等長的かつ推移的な作用の分類が知られているからこそ可能であった。対称空間に cohomogeneity one 計量を入れたリーマン多様体も、何らかの良い幾何的性質を持つリーマン多様体の例を供給する可能性がある。

4.4 その他

等質極小部分多様体の研究は, cohomogeneity one action の特異軌道が等質極小部分多様体であることから, 我々の研究と密接に関係する. \mathbb{R}^n および $\mathbb{R}H^n$ の場合には等質かつ極小ならば全測地的になるが, 一般にはそうではない. $\mathbb{C}H^n$ の等質極小部分多様体に関する研究は [1] により大きく進展している.

主曲率一定超曲面の研究も, cohomogeneity one action の非特異軌道は主曲率一定であるので, 我々の研究と関係する. \mathbb{R}^n および $\mathbb{R}H^n$ の場合には主曲率一定超曲面は等質であるが, 球面の場合には非等質な主曲率一定超曲面が存在する ([28], [14]). 一般の対称空間ではどうだろうか.

参考文献

- [1] D.V. Alekseevsky and A.J. Di Scala, Minimal homogeneous submanifolds of symmetric spaces, in: *Lie groups and symmetric spaces: in memory of F.I. Karpelevich* (Ed. S.G. Gindikin), Amer. Math. Soc. Transl. (2) 210 (2003), 11–25.
- [2] L. Berard-Bergery, Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein, *Institut Élie Cartan* **6**, 1–60.
- [3] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589–600.
- [4] J. Berndt and M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.
- [5] J. Berndt and H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **63** (2003), 1–40.
- [6] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 163–177.
- [7] J. Berndt and H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, in preparation.
- [8] J. Berndt and H. Tamaru, A construction of cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces, in preparation.
- [9] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [10] R.L. Bryant and S. Salamon, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, *Duke Math. J.* **58** (1989), no. 3, 829–850.

- [11] E. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. pura appl. IV. s.* **17** (1938), 177–191.
- [12] A.J. Di Scala and C. Olmos, The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space, *Math. Z.* **237** (2001), 199–209.
- [13] P.B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1996.
- [14] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Munzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.* **177** (1981) 479–502.
- [15] K. Grove and W. Ziller, Curvature and symmetry of Milnor spheres, *Ann. of Math. (2)* **152** (2000), no. 1, 331–367.
- [16] J. Heber, Noncompact homogeneous Einstein spaces, *Invent. Math.* **133** (1998), 279–352.
- [17] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature, *Math. Ann.* **211** (1974), 23–34.
- [18] W.-Y. Hsiang and H.B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.
- [19] K. Iwata, Classification of compact transformation groups on cohomology quaternion projective spaces with codimension one orbits, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 475–508.
- [20] K. Iwata, Compact transformation groups on rational cohomology Cayley projective planes *Tôhoku Math. J. (2)* **33** (1981), 429–442.
- [21] M. Kerr, Some new homogeneous Einstein metrics on symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 1, 153–171.
- [22] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 571–612.
- [23] D.S.P. Leung, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974), 327–339. Errata: *ibid.* **24** (1975), 1199.
- [24] D.S.P. Leung, Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds, *J. Diff. Geom.* **14** (1979), 167–177.

- [25] T. Levi-Civita, Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **26** (1937), 355–362.
- [26] R. Miyaoka, G_2 -geometry from the view point of hypersurface theory, 福岡大学微分幾何学研究会報告集 (2004).
- [27] P. S. Mostert, On a compact Lie group acting on a manifold, *Ann. Math. (2)* **65** (1957), 447–455. Errata: *ibid.* **66** (1957), 589.
- [28] H. Ozeki, and M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. II. *Tôhoku Math. J. (2)* **28** (1976), no. 1, 7–55.
- [29] B. Segre, Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **27** (1938), 203–207.
- [30] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495–506.
- [31] R. Takagi and S. Yorozu, Minimal foliations on Lie groups, *Tôhoku Math. J. (2)* **36** (1984) 541–554.
- [32] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere, in *Differential Geometry (in honor of Kentaro Yano)*, 469–481, Kinokuniya, Tokyo, 1972.
- [33] H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit (in Japanese), 数理解析研究所講究録 **1292** (2002), 106–114.
- [34] H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces, 上智大学数学講究録 **45** (2003), 105–120.
- [35] H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one (in Japanese), 部分多様体論・湯沢 2003 研究会記録集, 43–48.
- [36] H. Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, preprint.
- [37] T. H. Wolter, Einstein metrics on solvable Lie groups, *Math. Z.* **206** (1991), 457–471.
- [38] W. Ziller, Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces, *Math. Ann.* **259** (1982), no. 3, 351–358.