第 1 章

線型リー群

この章では, 線型リー群の基本的な事項を紹介する. 具体的な内容は,

- 線型リー群の定義 (1.1 節),
- 線型リー群の例 (1.2 節, 1.3 節, 1.4 節),
- 線型リー群の同型と局所同型 (1.5 節)

である. この章の内容をもう少し詳しく述べておく. 1.1 節において, 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分群を線型リー群と定義する. 1.2 節では, 実行列を使って表される典型的な例 (特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ など) を紹介する. 1.3 節では, 複素行列を使って表される典型的な例 (複素特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$, 特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ など) を紹介する. また 1.4 節では, 線型リー群の直積や, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の閉でない部分群の例を紹介する. 最後に, 1.5 節では, 線型リー群の同型と局所同型の概念を定義し, 直交群 $\mathrm{O}(n)$ と特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ は局所同型であるが同型ではないことを示す.

この章を読むための予備知識は, 簡単な線型代数, 群論, 位相空間論である. 線型リー群は一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分群として定義されるので, 部分群および閉集合については, 定義や基本的な性質を既知として話を進める. しかしながら, 本章では一般のリー群ではなく線型リー群に話を限定しているので, 多様体等の予備知識は仮定しない.

1.1 線型リー群の定義

この節では, 線型リー群の定義を説明する. 線型リー群は, 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分群として定義される.

まずは一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の定義を復習する. 本稿を通して, $M_n(\mathbb{R})$ は $n \times n$ 実行列の全体を表すものとする. 行列 g の行列式を $\det(g)$ で表す.

第 1 章の最終更新日: 2010/12/07

定義 1.1.1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群**[*1] と呼ぶ.

一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は, 群と位相空間の構造を自然に持つことに注意する. 群の積は行列の積で定め, 位相は $M_n(\mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^{n^2})$ の自然な位相からの相対位相を考える.

定義 1.1.2 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 G が **線型リー群**[*2] (正確に言うと, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群) であるとは, 次が成り立つこと:

(i) G は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群である,
(ii) G は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉集合である.

線型リー群 G も, 群と位相空間の構造を自然に持つことに注意する. 定義から, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ および単位行列だけから成る部分集合 $\{I_n\}$ は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である.

問題 1.1.3 $\mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R}) := \{(a) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \mid a > 0\}$ が $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 内の線型リー群であることを示せ. また, $\mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R})$ と加法群 $\mathbb{R}$ は, 群としても位相空間としても同型であることを示せ. (ヒント: 指数関数を用いて同型写像を与えることができる.)

1.2 線型リー群の例: 実行列の典型例

この節では, 実行列を使って表される典型的な線型リー群の例を紹介する. §1.2.1 では, 特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ が線型リー群であることを示す. §1.2.2 では, 直交群 $\mathrm{O}(n)$ が $\mathbb{R}^n$ の内積を保つ変換の成す群であることを示す.

1.2.1 実行列を使った例

ここでは, 特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 直交群 $\mathrm{O}(n)$, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ が線型リー群であることを示す.

例 1.2.1 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である (これを **特殊線型群**[*3] と呼ぶ).

証明. 部分群であることと閉集合であることを示せば良い. まずは部分群であることを示す. 示すことは, 次の二つの条件である:

(i) $\forall g, h \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $gh \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$,

---

[*1] general linear group
[*2] linear Lie group
[*3] special linear group

(ii) $\forall g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ g^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

まずは (i) を示す．任意に $g, h \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ をとる．このとき $\det(g) = \det(h) = 1$ である．すると, 行列式の性質より,

$$\det(gh) = \det(g)\det(h) = 1 \cdot 1 = 1$$

が成り立つ．よって $gh \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ である．次に (ii) を示す．任意に $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ をとる．このとき $\det(g) = 1$ である．先と同様に, 行列式の性質より,

$$1 = \det(I_n) = \det(g^{-1}g) = \det(g^{-1})\det(g) = \det(g^{-1})$$

が成り立つ．よって $g^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ である．以上より部分群であることが示された．

次に閉集合であることを示す．写像 $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は連続であり, $\mathbb{R} \supset \{1\}$ は閉集合である．連続写像による閉集合の逆像は閉集合であるので, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ は閉集合である． □

例 1.2.2 $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である (これを **直交群**[*4] と呼ぶ)．ここで, ${}^t g$ は g の転置行列を表す．

証明．部分群であることと閉集合であることを示せば良い．部分群であることは, 転置行列の性質 (${}^t(gh) = {}^t h {}^t g$) から容易に従う．閉集合であることは, 写像 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : X \mapsto {}^t X X$ が連続であることから従う． □

例 1.2.3 $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である (これを **特殊直交群**[*5] と呼ぶ).

証明．部分群であることと閉集合であることを示せば良い．これらは, 部分群と部分群の共通部分が部分群であることと, 閉集合と閉集合の共通部分が閉集合であることから従う． □

問題 1.2.4 次で定義される群 H_3 が $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 内の線型リー群であることを示せ (これを **3 次元ハイゼンベルグ群**[*6] と呼ぶ):

$$H_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

[*4] orthogonal group
[*5] special orthogonal group
[*6] the 3-dimensional Heisenberg group

1.2.2　直交群の性質

ここでは, 直交群 $\mathrm{O}(n)$ が $\mathbb{R}^n$ の自然な内積を保つ変換の成す群であることを示す．ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積は, $\mathbb{R}^n$ の元を縦ベクトルだと思うと,

$$\langle v, w\rangle := {}^t v w \quad (v, w \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義されていたことに注意する.

命題 1.2.5 $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle \ (\forall v, w \in \mathbb{R}^n)\}$.

証明．まずは $(\subset)$ を示す．任意に $g \in \mathrm{O}(n)$ をとる．すると, 任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して, 次が成り立つ:

$$\langle gv, gw\rangle = {}^t(gv)(gw) = {}^t v({}^t g g)w = {}^t v w = \langle v, w\rangle.$$

よって g は示すべき式の右辺に入る.

次に $(\supset)$ を示す．示すべき式の右辺から任意に g をとる．ここで ${}^t g g = (a_{ij})$ と成分表示する．示したいことは ${}^t g g = I_n$, すなわち $a_{kl} = \delta_{kl}$ (クロネッカーのデルタ) である．任意の (k, l) をとる．$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ で表す．すると, g が内積を保つことから,

$$\delta_{kl} = \langle e_k, e_l\rangle = \langle ge_k, ge_l\rangle = {}^t e_k({}^t g g)e_l = {}^t e_k(a_{ij})e_l = a_{kl}$$

が従う．よって $g \in \mathrm{O}(n)$ が示された. □

問題 1.2.6 行列 $I_{p,q}$ を

$$I_{p,q} := \left[\begin{array}{c|c} -I_p & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right]$$

で定義する．このとき, $\mathrm{O}(p, q) := \{g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid {}^t g I_{p,q} g = I_{p,q}\}$ が線型リー群であることを示せ (これを **不定値直交群**[*7] と呼ぶ)．また $\mathrm{O}(p, q)$ は, 符号数 (p, q) の不定値内積

$$\langle v, w\rangle_{p,q} := {}^t v I_{p,q} w = -v_1 w_1 - \cdots - v_p w_p + v_{p+1} w_{p+1} + \cdots v_n w_n$$

を保つ変換の成す群であることを示せ.

[*7] indefinite orthogonal group

1.3　線型リー群の例: 複素行列の典型例

この節では, 複素行列を使って表される典型的な線型リー群の例を紹介する. §1.3.1 では, 複素一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群が線型リー群となることを示す. これを用いると, 複素特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$, 特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ は線型リー群になることが分かる. §1.3.2 では, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ が $\mathbb{C}^n$ の自然な内積を保つ変換の成す群であることを示す.

1.3.1　複素行列を使った例

ここでは, 複素一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群が線型リー群となることを示す. また, これを用いて, 複素特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$, 特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ が線型リー群になることを示す. 本稿を通じて, $M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ 複素行列全体を表すものとする.

定義 1.3.1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **複素一般線型群**[*8] と呼ぶ.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は群と位相空間の構造を自然に持つ. 群の積は行列の積で定め, 位相は $M_n(\mathbb{C})$ $(= \mathbb{C}^{n^2})$ の自然な位相からの相対位相を考える. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を線型リー群と思うために, 次の写像を考える:

$$f : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R}) : A + iC \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & -C \\ \hline C & A \end{array}\right].$$

命題 1.3.2 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は f を通して線型リー群と見なすことができる. すなわち,

(1) f の制限写像は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ から $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ への群同型写像かつ同相写像である,

(2) $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群.

証明. まず (1) を示す. 写像

$$f' := f|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

が群の同型写像かつ同相写像であることを示せば良い. 写像 f' が群の同型写像であることは容易に確かめられる. また, 写像 f は明らかに連続であるので, その制限 f' は連続である. 逆写像 $(f')^{-1}$ も, 連続写像

$$M_{2n}(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{C}) : \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \mapsto A + iC$$

[*8] complex general linear group

の制限と一致するので, 連続である. よって f' は同相写像である.

次に (2) を示す. $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ が $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ の部分群であることは明らかなので, 閉集合であることを示す. そのために,

$$J := \left[\begin{array}{c|c} & -I_n \\ \hline I_n & \end{array}\right] \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

とおく. すると, 次が成り立つ:

$$f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid gJ = Jg\}.$$

よって $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ は, 連続写像 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \to M_{2n}(\mathbb{R}) : g \mapsto gJ - Jg$ による一点集合の逆像なので, 閉集合である. □

補題 1.3.3 G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 内の閉部分群とする. このとき, G は写像 f を通して線型リー群と見なすことができる (すなわち, $f(G)$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である).

証明. 像 $f(G)$ が $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群であることを示せば良い. すなわち, $f(G)$ が部分群であり閉集合であることを示せば良い. 部分群であることは明らか. 閉集合であることを示す. 仮定より G は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉集合である. 命題 1.3.2 (1) より, f は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ から $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ への同相写像を与えるので, $f(G)$ は $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の閉集合である. さらに, 命題 1.3.2 (2) より, $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の閉集合である. 閉集合内の閉集合は閉集合であるので, $f(G)$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の閉集合である. □

補題 1.3.3 を用いて, 複素行列を使った線型リー群の例を構成することができる. 以下, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群 G は, 正確には f による像が線型リー群であると言うべきであるが, 省略して単に線型リー群であると言うこととする.

例 1.3.4 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ は線型リー群である (これを **複素特殊線型群**[*9] と呼ぶ).

証明. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群であることは, 例 1.2.2 と同様に確かめられる. よって, 補題 1.3.3 より題意は従う. □

例 1.3.5 $\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}g = I_n\}$ は線型リー群である (これを **ユニタリ群**[*10] と呼ぶ). ここで $\overline{g}$ は g の複素共役行列を表す.

証明. $\mathrm{U}(n)$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群であることは, 例 1.2.2 と同様に確かめられる. よって, 補題 1.3.3 より題意は従う. □

[*9] complex special linear group
[*10] unitary group

例 1.3.6 $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ は線型リー群である (これを **特殊ユニタリ群**[*11] と呼ぶ).

証明. $\mathrm{SU}(n)$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉部分群であることは, 例 1.2.3 と同様に確かめられる. よって, 補題 1.3.3 より題意は従う. □

問題 1.3.7 次で定義される群 $H_3^{\mathbb{C}}$ が線型リー群であることを示せ (これを 3 **次元複素ハイゼンベルグ群**[*12] と呼ぶ):

$$H_3^{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

問題 1.3.8 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 内の閉部分群であることを示せ. また, これを用いて, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 内の閉部分群であることを示せ. (線型リー群を「$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 内の閉部分群」によって定義する場合もあるが, この問題と命題 1.3.2 により, その定義と我々の定義が同値であることが分かる.)

1.3.2 **ユニタリ群の性質**

ここでは, ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ が $\mathbb{C}^n$ の自然な内積を保つ変換の成す群であることを示す. $\mathbb{C}^n$ 上の自然な内積は, $\mathbb{C}^n$ の元を縦ベクトルだと思うと,

$$\langle v, w \rangle := {}^t\overline{v}w \quad (v, w \in \mathbb{C}^n)$$

によって定義されていたことに注意する.

命題 1.3.9 $\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \ (\forall v, w \in \mathbb{C}^n)\}$.

証明. 命題 1.2.5 と全く同様に証明できる. □

問題 1.3.10 問題 1.2.6 と同様に, $\mathrm{U}(p,q) := \{g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g}I_{p,q}g = I_{p,q}\}$ と定義する. これが線型リー群であることを示せ (これを **不定値ユニタリ群**[*13] と呼ぶ). また $\mathrm{U}(p,q)$ は, 符号数 (p,q) の不定値内積

$$\langle v, w \rangle_{p,q} := {}^t\overline{v}I_{p,q}w$$

を保つ変換の成す群であることを示せ.

[*11] special unitary group
[*12] the 3-dimensional complex Heisenberg group
[*13] indefinite unitary group

1.4 線型リー群の例: その他の例

この節では, いくつかの線型リー群の例を紹介する. ここで紹介する例は, これまでの節で紹介したような典型的なもの以外の例を構成するときに, 有用である. §1.4.1 では, 線型リー群と線型リー群の直積を定義し, それがまた線型リー群となることを示す. §1.4.2 では, 次のための準備として, SO(2) が回転行列の成す群と一致することを示す. §1.4.3 では, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の閉ではない部分群の例を挙げる.

1.4.1 線型リー群の直積

ここでは, 線型リー群と線型リー群の直積を定義し, それがまた線型リー群となることを示す. この先, 線型リー群の様々な例を構成するときに, 直積のアイデアは有用である.

例 1.4.1 次で定義される $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ は, $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である:

$$\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} g_p & 0 \\ \hline 0 & g_q \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid g_p \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}),\ g_q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) \right\}.$$

証明. 部分群であることは明らか. 閉集合であることを示す. ここで, 行列 $I_{p,q}$ を考える (問題 1.2.6 参照). すると, $g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ に対して, $g \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ であるための必要十分条件が $gI_{p,q} = I_{p,q}g$ となることが分かる. このことから, 閉であることが示される. □

命題 1.4.2 G_1, G_2 をそれぞれ $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ 内の線型リー群とする. このとき, 次で定義される $G_1 \times G_2$ は, $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群である (これを **直積**[*14] と呼ぶ):

$$G_1 \times G_2 := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} g_1 & 0 \\ \hline 0 & g_2 \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2 \right\}.$$

証明. 部分群であることは明らか. 閉集合であるを示す. 仮定より, G_1 は $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ の閉集合であり, G_2 は $\mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ の閉集合である. また, 線型リー群としての直積 $G_1 \times G_2$ および $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ は, 位相空間としての直積空間と同相であることが分かる. このことから, 直積の性質より, $G_1 \times G_2$ は $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ 内の閉集合である. また例 1.4.1 より, $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ 内の閉集合である. 以上より, 題意は従う. □

[*14] direct product

問題 1.4.3 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G に対して, 次で定義される $\mathrm{diag}(G)$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群であることを示せ:

$$\mathrm{diag}(G) := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & g \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid g \in G \right\}.$$

1.4.2 回転群

ここでは, $\mathrm{SO}(2)$ が回転行列の成す群と一致することを示す. ただしここで, 回転行列 $R(\theta)$ は次で与えられる行列である:

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

例 1.4.4 $\mathrm{SO}(2) = \{R(\theta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ が成り立つ. 特に, $\mathrm{SO}(2)$ は円周と同相である.

証明. まずは $(\supset)$ を示す. 任意に $\theta \in \mathbb{R}$ をとる. このとき, $R(\theta) \in \mathrm{SO}(2)$ であることは, 直接計算で容易に確かめられる.

次に $(\subset)$ を示す. 任意に $g \in \mathrm{SO}(2)$ をとる. 次のように g を成分表示する:

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

直交群の定義より ${}^t gg = I_2$ が成り立つ. この条件を成分で表すと,

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

一つ目の条件より, 次を満たす $\theta \in \mathbb{R}$ が存在する:

$$(a, c) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

残りの二つの条件より, ベクトル (b, d) は, 長さが 1 かつ (a, c) に垂直である. このことから, $(b, d) = \pm(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ でなくてはならない. また, 特殊直交群の定義より $\det(g) = 1$ が成り立つ. この条件を加味すると,

$$(b, d) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

であることが分かる. よって g は回転行列である.

$\mathrm{SO}(2)$ と円周 S^1 が同相であることは, $R(\theta) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$ によって定義される写像が同相写像であることから, 容易に分かる. □

問題 1.4.5 $\mathrm{U}(1) = \{e^{i\theta} \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ となることを示せ. (このことから, $\mathrm{U}(1)$ と $\mathrm{SO}(2)$ は, 群としても位相空間としても同型となることが分かる.)

1.4.3　線型リー群でない部分群の例

ここでは, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の閉ではない部分群の例を挙げる. 定義によりこれは線型リー群ではないが, 後に見るように, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の部分リー群の例を与える.

例を構成するためのアイデアは, 以下の通りである. 例 1.4.4 より $\mathrm{SO}(2)$ は円周 S^1 と同相なので, 直積 $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ は 2 次元トーラスと同相である. ここで, $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通り傾きが無理数の直線を考える. すると, $\mathbb{R}^2$ からトーラスへの自然な射影によるこの直線の像は, トーラス内で稠密になる. これが閉でない部分群になる. 以上のことを行列の言葉で書くと, 以下のようになる.

例 1.4.6 無理数 λ に対して, 次で定義される群 G_λ は, $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ の部分群だが閉集合ではない:

$$G_\lambda := \left\{ \begin{bmatrix} R(\pi\theta) & 0 \\ 0 & R(\lambda\pi\theta) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

証明. 部分群であることの証明は容易. 閉集合でないことを示す. そのためには, 閉包 $(G_\lambda)^d$ が次をみたすことを示せば十分である:

$$(G_\lambda)^d = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2).$$

まずは $(\subset)$ を示す. 命題 1.4.2 より, 直積 $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ は線型リー群なので, 特に閉集合である. 閉包は, その集合を含む最小の閉集合なので, 包含関係 $(\subset)$ が従う.

次に $(\supset)$ を示す. 証明には,

$$\{R(2\pi\lambda n) \mid n \in \mathbb{Z}\}^d = \mathrm{SO}(2) \tag{1.1}$$

を用いる (これの証明は, 例えば [松本][*15] を参照). 任意に $g \in \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ をとる. このとき, 例 1.4.4 より,

$$g = \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\theta_2) \end{bmatrix}$$

と表すことができる. 示すことは $g \in (G_\lambda)^d$ なので, g に収束する点列 $\{g_n\} \subset G_\lambda$ を構成したい. そのために, $\mu := \theta_2 - \lambda\theta_1$ とおく. このとき (1.1) より,

$$\exists \{n_k\} \subset \mathbb{Z} \ : \ R(2\pi\lambda n_k) \to R(\mu).$$

[*15] 松本 幸夫; 多様体の基礎, 東京大学出版会 (1988), 344pp.

これを用いて, 点列 $\{g_k\}$ を

$$g_k := \begin{bmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\lambda\theta_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(2\pi n_k) & 0 \\ 0 & R(2\pi\lambda n_k) \end{bmatrix} \in G_\lambda$$

と定義すると, $g_n \to g$ が示される. 以上より, $g \in (G_\lambda)^d$ が示された. □

1.5　線型リー群の同型

線型リー群に対して, 同型および局所同型という概念を定義する. §1.5.1 では, 同型を定義する. 線型リー群として同型であれば群同型かつ同相であるが, その逆は成り立たない. §1.5.2 では, 局所同型を定義する. 同型であれば局所同型であるが, その逆は成り立たない. 例として, $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ が局所同型であるが同型ではないことを示す.

1.5.1　線型リー群の同型

ここでは, 線型リー群の同型を定義する. また, 線型リー群として同型であれば群同型かつ同相であることを示す. さらに, この主張の逆が成り立たないことの反例を挙げる.

定義 1.5.1 各 $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, 次の写像 I_a を **内部自己同型**[*16] と呼ぶ:

$$I_a : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : g \mapsto aga^{-1}.$$

平面曲線に対しては, 回転と平行移動と折り返しという平面上の変換 (実は等長変換のこと) をまず先に定義し, その変換で移り合うという性質によって合同を定義した. 線型リー群の合同もこれと同様に, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 上の内部自己同型という変換をまず先に考え, それで移り合うという性質によって線型リー群の同型を定義する.

定義 1.5.2 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が **同型**[*17] とは, それらが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の内部自己同型で移り合うこと, すなわち, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : I_a(G_1) = G_2$.

命題 1.5.3 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が同型ならば, それらは群同型かつ同相である.

証明. 任意の $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して, I_a は群同型写像かつ同相写像である. 命題の主張は, このことから直ちに従う. □

ちなみに, 命題 1.5.3 の逆は成り立たない. 次が簡単な反例である.

[*16] inner automorphism

[*17] isomorphic

例 1.5.4 直積 $\{1\} \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ と $\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}))$ (問題 1.4.3 参照) は, 群同型かつ同相であるが, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 内の線型リー群として同型ではない.

証明. どちらも $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ と群同型かつ同相であることは明らか. ここでは, 線型リー群として同型でないことを示す. 同型であると仮定する. ここから, 内部自己同型 I_a が行列式を保つことを用いて, 矛盾を導く. まずは, 同型の定義から, 次をみたす $a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が存在する:

$$I_a(\{1\} \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})) = \mathrm{diag}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})).$$

ここで

$$g := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \{1\} \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$$

を考える. このとき $I_a(g) \in I_a(\{1\} \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}))$ であり,

$$\det(I_a(g)) = \det(aga^{-1}) = \det(g) = -1$$

が成り立つ. 一方で, $\mathrm{diag}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}))$ の任意の元の行列式が正であることが容易に分かる. これは矛盾. 以上より, 同型でないことが示された. □

命題 1.5.3 の逆が成り立たない理由を感覚的に述べると, 線型リー群の同型は, 群や位相空間の情報だけでなく, 「$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ への入り方」の情報も保たなくてはならないからである. これは, 円と楕円が平面曲線としては違うが位相空間としては同相である, ということと同様の状況になっている.

問題 1.5.5 線型リー群の直積 $G_1 \times G_2$ と $G_2 \times G_1$ が同型であることを示せ. (ヒント: G_1 を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群, G_2 を $\mathrm{GL}_{n+k}(\mathbb{R})$ 内の線型リー群として,

$$a := \left[\begin{array}{c|c|c} & I_n & \\ \hline & & I_k \\ \hline I_n & & \end{array}\right]$$

で定義される内部自己同型を考える.)

1.5.2　線型リー群の局所同型

ここでは, 線型リー群の局所同型を定義する. 線型リー群として同型であれば局所同型であるが, 逆は成り立たない.

定義 1.5.6 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の線型リー群 G_1, G_2 が **局所同型**[*18] とは, それぞれの単位元の近傍が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の内部自己同型で写りあうこと, すなわち, 次が成り立つこと: $\exists U_1$ (G_1 の単位元を含む近傍), $\exists U_2$ (G_2 の単位元を含む近傍), $\exists a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : I_a(U_1) = U_2$.

線型リー群が同型ならば局所同型であることは, 自明である. この逆が成立しないことの反例は, 次で与えられる.

命題 1.5.7 直交群 $\mathrm{O}(n)$ と特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ は, 局所同型であるが, 同型ではない.

証明. まずは $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ が局所同型であることを示す. そのために, $\mathrm{O}(n)$ の単位元を含む近傍 U_1 を与える. 各 $g \in \mathrm{O}(n)$ に対して,

$$\det(g) = \pm 1$$

が成り立つことが, $1 = \det(I_n) = \det({}^t g g) = \det({}^t g)\det(g) = \det(g)^2$ から分かる. ここで, 行列式を対応させる写像 $\det : \mathrm{O}(n) \to \{\pm 1\}$ を考える. これは連続であり, $\{1\}$ は値域の開集合なので, その $\det$ による逆像

$$U_1 := \det{}^{-1}(\{1\})$$

は $\mathrm{O}(n)$ の単位元を含む近傍である. この U_1 と $\mathrm{SO}(n)$ は明らかに一致する. 以上より, $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ は局所同型である.

次に, $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ が同型でないことを示す. 背理法を用いる. これらが同型であると仮定する. 定義より, 次をみたす $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在する:

$$I_a(\mathrm{SO}(n)) = \mathrm{O}(n).$$

任意に $g \in I_a(\mathrm{SO}(n))$ をとる. すると, $h \in \mathrm{SO}(n)$ を用いて $g = I_a(h)$ と表される. このとき,

$$\det(g) = \det(I_a(h)) = \det(aha^{-1}) = \det(h) = 1$$

が成立する. ところが, $\mathrm{O}(n)$ には行列式が -1 になる元が存在するので, これは矛盾である. よって $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ は同型でない. □

問題 1.5.8 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ と $\mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R})$ (問題 1.1.3 参照) は局所同型だが同型でないことを示せ.

[*18] locally isomorphic