Graded Lie algebras and Einstein solvmanifolds [1]

田丸 博士（広島大学大学院理学研究科）

リー環 $\mathfrak{g}$ の部分空間への分解 $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ が **gradation** であるとは, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ $(\forall i, j)$ が成立すること. 半単純リー環の gradation は金行先生を始めとする多くの研究者によって研究されており, その構造や分類はほぼ全て分かっていると言って良い. 本講演では, 次の定理を紹介する:

定理 1 任意の半単純リー環の任意の gradation $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ から出発して, Einstein 可解多様体を構成することが出来る. より正確に言うと, 巾零部分環 $\sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ には "自然な" 可解拡大が存在し, 対応する単連結可解リー群上に所定の左不変計量を入れた空間は Einstein となる.

この定理は, 「実半単純リー群の放物型部分群の巾零根基は Einstein 可解拡大を持つ」と言い換えることも出来る（$\sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{g}$ の放物型部分環である）.

1 背景

等質 Einstein 多様体. 本講演で構成されるものは, 非コンパクト等質 Einstein 多様体である. このようなものを考えるとき, 可解群を考えるのは自然である. 次の予想がある:

- Alekseevskii 予想: 非コンパクト等質 Einstein 多様体は, 可解多様体に限る.

ここで **可解多様体** とは, 等長的かつ推移的に作用する可解群を持つリーマン多様体である. 特に単連結可解多様体は, 可解群に左不変計量を入れたものになる. Einstein 可解多様体に関する研究は, [1] 以降, 非常に活発である. 特にその moduli space が興味を持たれているが, しかしその moduli space の大きさに比べて（一般に次元が高いらしい, くらいのことしか分かっていないが）, 知られている Einstein 可解多様体の例は非常に少なく感じられる. 本講演の結果により, Einstein 可解多様体の例を無限個構成することが出来た（しかし離散的であるので, moduli space の解明には程遠い $\cdots$ ）.

リー環の moduli. n 次元実リー環の全体 $\mathcal{M}_n$ は, 次のような集合である:

$$\mathcal{M}_n = \{\mu \in \wedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \mid \mu \text{ は Jacobi 律を満たす} \}$$

ここで, 同型類全体は $\mathcal{M}_n/\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, 等長類全体は $\mathcal{M}_n/\mathrm{O}(n)$ である. この集合がどうなっているかという問題は興味深い（しかし, n が大きい場合に調べることは非常に困難であると思われる）.

- 明らかに, $\mu = 0 \in \mathcal{M}_n$ である（可換リー環）.
- 可換リー環の次に bracket の構造が簡単なもの, 例えば 2 階の巾零リー環は, 0 の近くにあり, 一方で, 半単純リー環を与える μ は bracket の構造が複雑であるので, 0 からは遠くにあると予想される（可解リー環は, その中間くらいだろうか？）.
- 任意のリー環は半単純なものと可解なものに分解できる（Levi 分解）ので, $\mathcal{M}_n$ の構造を理解する為には, 可解リー環のことを良く理解する必要がある.

[1]金行先生退職記念研究集会「等質空間の幾何学的諸相」(2006/03/02-04) 予稿

リー環は, 0 に近いほど良く分かるかと言う訳ではなく（もちろん 0 そのものは良く分かっているが）, 逆に 0 から最も遠い半単純なものの方が調べやすい. 本講演では可解群を考えるが, 出発点は半単純リー環の gradation であった. すなわち, 未知の部分が多い可解リー環の中で, 半単純リー環を使って調べることが出来る部分を調べたものである.

2 手法

gradation. 我々は, 半単純 gradation $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ から出発して, Einstein 可解多様体を構成するが, この構成は "単射" ではない. 実は gradation のうちで, type α_0 と呼ばれるものだけを考えれば良い. すなわち, 以下のようにして得られる gradation のみを考えれば十分（[2] を参照）:

- 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, その制限ルート系を Δ, 単純ルート系を $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする. Λ は Dynkin 図形の頂点の集合に対応する.
- Dynkin 図形の部分図形（すなわち部分集合 $\Lambda' = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\} \subset \Lambda$ ）を考える.
- $\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間とし, 次のようにおくと $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ は gradation である:

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{c_{i_1} + \cdots + c_{i_s} = k} \mathfrak{g}_{c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r}.$$

すなわち, 我々は各半単純リー環に対して, 概ね 2^r 個の type α_0 gradation を得た（正確には, Dynkin 図形の同型写像の分を加味しなくてはならない）. これら全てから Einstein 可解多様体を構成出来る. しかし, 異なる gradation から構成された可解多様体が同型となることもあり得る.

証明の戦略. 我々は定理を, 部分多様体論を用いて帰納法で証明する. その為のキー:

- $\Lambda'' \subset \Lambda' \subset \Lambda$ とする. Λ'', Λ' から構成される可解多様体をそれぞれ (S'', g''), (S', g') とすると, (S'', g'') は (S', g') のリーマン等質部分多様体.

帰納法は, Λ' の元の個数に関して行う. $\sharp\Lambda' = 1$ の場合は, 講演者が以前に Einstein 性を示している ([3]). $\sharp\Lambda' > 1$ の場合の曲率の計算は, $\sharp\Lambda'' = \sharp\Lambda' - 1$ となるものを取ってきて, 帰納法の仮定を用いて行う. ちなみに, $\Lambda' = \Lambda$ の場合, 構成された可解多様体は, 非コンパクト型対称空間に他ならない（この場合, gradation は最長のものであり, 対応する放物型部分環は極小のものであり, 巾零部分環 $\sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ は岩沢分解の巾零部分と一致する）.

参考文献

[1] J. Heber, Noncompact homogeneous Einstein spaces, *Invent. Math.* **133** (1998), 279-352.

[2] S. Kaneyuki, H. Asano, Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems, *Nagoya Math. J.* **112** (1988), 81–115.

[3] H. Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, preprint.

[4] H. Tamaru, A class of noncompact homogeneous Einstein manifolds, *Diff. Geom. Appl.* Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 119-127.