階数が高い非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の構成

田丸 博士
（広島大学 大学院理学研究科）

於
「幾何構造と部分多様体の交差する領域」
名城大学

2007/03/06–08

Introduction (1/2)

- joint work with Jürgen Berndt (University College Cork, Ireland)
- 研究の目的: 対称空間内の等質超曲面の分類
- 今回の目的: 階数が高い非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の構成
  - [手法]
    $\mathbb{C}H^n$ 内の等質 ruled 極小超曲面の構成の類似
  - [定理]
    ある種の全測地的部分多様体 $M' \subset M$ に対して,
    M' の全ての等質超曲面は M の等質超曲面に ”拡張” できる
  - [帰結]
    非常に数多くの等質超曲面が構成される
    階数が上がる程, 等質超曲面は多くなる（非コンパクトの特殊性）

Introduction (2/2)

▼ 背景:

- $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の等質超曲面の分類は既知 (Cartan 以前).
- コンパクト型 (単連結) 対称空間の等質超曲面の分類は既知 (Hsiang - Lawson, 高木亮一, . . ., Kollross).
- Berndt - T.: 非コンパクト型対称空間に対して,
  - 焦点部分多様体を持たない等質超曲面の分類 (2003).
  - 焦点部分多様体が全測地的な等質超曲面の分類 (2004).
  - 階数 1 の場合の等質超曲面を ”ほぼ” 分類 (2007).

▼ 今日の話題:

- 簡単な例: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ を用いた構成.
- 別の例 (Lohnherr - Reckziegel): $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ を用いた構成.
- 主定理とその証明.

Example: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (1/4)

▼ 命題:

- 全測地的部分多様体 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ に対して,
  $\mathbb{R}^2$ の全ての等質超曲面は, $\mathbb{R}^3$ の等質超曲面に "拡張" できる.

▼ 証明:

- $\mathbb{R}^2 \supset X$: 等質超曲面 $\Leftrightarrow X =$ 直線, 円.
- X の各点に z 軸をくっ付ければ,
  - 直線 $\mapsto$ 平面.
  - 円 $\mapsto$ 円柱.

▼ この構成を, 群論的に眺めてみよう.

Example: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ **(2/4)**

- **定義:**
  - **部分多様体** $X \subset M$ **が等質** $\Leftrightarrow \exists H \subset I(M)$ **s.t.** $X = H.p$**.**
  - $H \curvearrowright M$ **: C1 (cohomogeneity one)** $\Leftrightarrow \min_{p \in M} \operatorname{codim} H.p = 1$**.**
- **注:**
  - M **の等質超曲面** $\leftrightarrow$ M **への C1-action.**
  - **我々の主定理は次と同値:**

    ある種の全測地的部分多様体 $M' \subset M$ **に対して,**

    M' **への全ての C1-action は,** M **への C1-action に "拡張" できる.**

Example: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (3/4)

- **命題:**
  - **全測地的部分多様体** $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ **に対して,** $\mathbb{R}^2$ **への全ての C1-action は,** $\mathbb{R}^3$ **への C1-action に "拡張" できる.**

- **等長変換群:**
  - $I(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.
  - $I(\mathbb{R}^n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ **by** $(a, v).x := ax + v$.
  - **群演算:** $(a, v) \cdot (b, u) := (ab, v + au)$.
  - **自然に** $I(\mathbb{R}^2) \subset I(\mathbb{R}^3)$,

$$I(\mathbb{R}^2) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}(2) & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Example: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (4/4)

- **証明:**
  - $H' \curvearrowright \mathbb{R}^2$ **に対して,** $H := H' \cdot \{(0,0,z)\} \curvearrowright \mathbb{R}^3$ **とすれば良い.**
  - **直線** $\to$ **平面:**

$$H' = \{1\} \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \to \quad H = \{1\} \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

  - **円** $\to$ **円柱:**

$$H' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}(2) & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \to \quad H = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}(2) & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

- **ポイント:**
  - **部分群** $\{(0,0,z)\}$ **は, 法空間に推移的,**
  - $H' \cdot \{(0,0,z)\}$ **は常に群 (**H' **は** $\{(0,0,z)\}$ **を normalize).**

Example: $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ (1/3)

- **定理 (Lohnherr - Reckziegel 1999):**
  - horocycle $\gamma \subset \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は,
    各点 $\gamma(t)$ に全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1}$ ($\perp \dot{\gamma}(t), J\dot{\gamma}(t)$) をくっ付けることにより,
    $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の等質超曲面に拡張できる.
- **群論的に眺める:**
  - $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ の場合には,
    - $I(\mathbb{R}^3) = \mathrm{O}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, $\quad \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}^3$: 単純推移的.
    - 部分群 $\{(0,0,z)\} \subset \mathbb{R}^3$ が良い性質を満たす.
  - $I(\mathbb{C}\mathrm{H}^n)$ も, 同様の分解と都合の良い部分群を持つ.

Example: $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ (2/3)

- 等長変換群の都合の良い分解 — 岩沢分解:
  - $G = I^0(\mathbb{C}\mathrm{H}^n) = \mathrm{SU}(1,n) = KAN$: 岩沢分解,
    - K : 極大コンパクト, A : 可換, N : 巾零.
    - $I(\mathbb{R}^n)$ との対比: $K \leftrightarrow \mathrm{O}(n)$, $AN \leftrightarrow \mathbb{R}^n$.
  - $AN \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{H}^n$: 単純推移的.
  - 今回の構成では, AN だけ見れば十分.

- AN の構造:
  - AN は Damek-Ricci space;
  - $\mathfrak{a} = \mathbb{R}A$, $\quad \mathfrak{n} = \mathrm{span}\{X_i, Y_i, Z \mid i = 1, \ldots n-1\}$.
  - $\mathfrak{n}$ は Heisenberg: $[X_i, Y_i] = Z$, 他の bracket $= 0$.
  - $[A, X_i] = (1/2)X_i, \quad [A, Y_i] = (1/2)Y_i, \quad [A, Z] = Z$.
  - 複素構造: $J(A) = Z, \quad J(X_i) = Y_i$.

Example: $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ (3/3)

- **構成 (Berndt 1998):**
  - **全測地的** $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \leftrightarrow \quad \mathbb{R}A + \mathbb{R}X_1$.
  - **horocycle** $\gamma \leftrightarrow \quad \mathfrak{h}' = \mathbb{R}X_1$.
  - **全測地的** $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1} \leftrightarrow \quad \mathrm{span}\{A, X_i, Y_i, Z \mid i = 2, \ldots n-1\}$.
  - **出来たもの:**

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}' + \mathrm{span}\{A, X_i, Y_i, Z \mid i = 2, \ldots n-1\} \\ &= \mathfrak{a} + (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}Y_1). \end{aligned}$$

  - $\mathfrak{h}$ **が subalgebra であることは容易.**
  - $\mathfrak{h}$ **に対応する群の** $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ **への作用は C1-action.**
  - **ポイント: くっ付けるもの** $\mathbb{C}\mathrm{H}^{n-1}$ **が, とても都合が良い.**

Main Theorem (1/3)

▼ **主定理:**

- ○ **ある種の全測地的部分多様体** $M' \subset M$ **に対して,**
  M' **の全ての等質超曲面は,** M **の等質超曲面に "拡張" できる.**
- ○ **ある種の全測地的部分多様体** $M' \subset M$ **に対して,**
  M' **への全ての C1-action は,** M **への C1-action に "拡張" できる.**

▼ **ある種の全測地的部分多様体:**

- ○ **Dynkin 図形の部分図形に対応する全測地的部分多様体.**
- ○ **例えば** $\overset{(2)}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}} \Longleftarrow\!\Longrightarrow \overset{(2n,1)}{\underset{\alpha_2}{\circledcirc}}$ **なら,** $\overset{(2)}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}}$ **と** $\overset{(2n,1)}{\underset{\alpha_2}{\circledcirc}}$ **の 2 種類.**

Main Theorem (2/3)

- ある種の全測地的部分多様体 (ルート系):
  - Λ : 単純ルート系 ($\leftrightarrow$ Dynkin 図形の頂点).
  - $\Lambda \supset \Lambda'$: 部分集合 ($\leftrightarrow$ Dynkin 図形の部分図形).
  - Δ' : Λ' で生成されるルートの集合.
  - $M' \leftrightarrow \mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}'$ とすると, $\mathfrak{n}' = \sum_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$.
- 証明:
  - $H' \curvearrowright M'$: C1-action とする. 当然, $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$.
  - $\nu_o(M') := (\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) \ominus (\mathfrak{a}' + \mathfrak{n}')$.
  - $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}' + \nu_o(M')$ は subalgebra
    ($\mathfrak{g}'$ は $\nu_o(M')$ を normalize するから).
  - 対応する H の作用は, C1-action (slice 定理より).
  - ポイント: くっ付けるもの $\nu_o(M')$ が, とても都合が良い.

Main Theorem (3/3)

▼ **例:**

- $M = \mathrm{SU}(2, n+2)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n+2)) \supset M' = \mathbb{C}\mathrm{H}^{n+1}$.
- **Dynkin 図形で書くと,** $\underset{\alpha_1}{\overset{(2)}{\bigcirc}} \Longleftrightarrow \underset{\alpha_2}{\overset{(2n,1)}{\circledcirc}} \supset \underset{\alpha_2}{\overset{(2n,1)}{\circledcirc}}$.
- $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}_0' + \mathbb{R}H_{\alpha_2} + \mathfrak{g}_{\pm\alpha_2} + \mathfrak{g}_{\pm 2\alpha_2}$.
- $\nu_o(M') = (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}H_{\alpha_2}) + \mathfrak{g}_{\alpha_1} + \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} + \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2} + \mathfrak{g}_{2\alpha_1+2\alpha_2}$.
- **ルートの性質より,** $[\mathfrak{g}', \nu_o(M')] \subset \nu_o(M')$.

▼ **観察:**

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}' + \nu_o(M') \not\subset \mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g} = \sum_{k=-2}^{2} \mathfrak{g}^k$, **where** $\mathfrak{g}^k$: α_1 **の係数が** k **のルート空間の和.**
- $\mathfrak{g}' + \nu_o(M') \subset \mathfrak{g}^0 + \mathfrak{g}^1 + \mathfrak{g}^2$: **parabolic subalgebra.**

Further Problems

▼ 当然の疑問:

- 全ての C1-action がこれで作れるのか？　$\to$ No!

▼ 定理 (Berndt - T., 2007):

- 非コンパクト型対称空間 M への C1-action は,

  (1) 全測地軌道を持つ, or

  (2) 境界 $M(\infty)$ に固定点を持つ (parabolic subgroup に含まれる).

▼ コメント:

- (1) の場合は分類済 (Berndt - T.).
- 今回の方法で構成できるのは, (2) の場合のみ.
- (2) であっても, 今回の方法で構成されるとは限らない...