Parabolic subgroups and Einstein solvmanifolds [1]

田丸 博士[2]（広島大学大学院理学研究科）

0　要約

本稿で紹介する主定理は次のものである:「実半単純リー群の放物型部分群の巾零根基は Einstein 可解拡大を持つ」. この定理で得られた Einstein 可解多様体のクラスは, 全ての非コンパクト型対称空間を含み, また, 巾零部分は任意の nilpotency を取り得る. 本稿では, この定理を紹介し, その証明の概略を述べ, 関連する問題等についても言及したい. 本稿の結果は, 筆者の論文 [35] の結果の一般化である (この結果そのものは [37] に書かれる予定). プロシーディング [36] に, 主定理から得られる Einstein 可解多様体の, 低次元の場合の一覧表がある.

1　導入

リーマン多様体 (M, g) が **可解多様体** (**solvmanifold**) であるとは, M に等長的かつ推移的に作用する可解群が存在することである. 特に本稿では単連結なもののみを考える. この場合には, 単連結可解群に左不変計量を入れた空間と思って良い. 可解多様体の研究は最近非常に活発であるが, その理由の一つは, 可解多様体は (半単純リー群を考えているだけでは登場しないような) 興味深いリーマン多様体の例を供給するから, であると思われる. 本稿の内容と関連する例を挙げる.

- 可解多様体は, 等質 Einstein 多様体の例を (連続変形が可能であり, その moduli 空間が一般に高次元になるくらい) 豊富に供給する. Einstein 可解多様体に関する文献は数多くあるが, 例えば Heber ([18]) およびその参考文献を参照. また, 最近の Lauret ([27]) の論文には, 現在までに知られている Einstein 可解多様体の一覧がある.

- 可解多様体は, 負曲率等質多様体の例も豊富に供給する (例えば [21], [5], [15] などを参照). さらに, 負曲率等質多様体は可解多様体である. 断面曲率に関しては Section 5.3 でも言及する.

- 可解多様体は, 調和空間に関する Lichnerowicz 予想の反例を供給した. Damek-Ricci ([13]) によって構成されたこの反例は, H-type 群と呼ばれる巾零リー群を可解拡大して得られた可解多様体であり, 現在では Damek-Ricci space と呼ばれることが多い ([6] を参照). ちなみに, 等質調和空間の分類 (知られているもの以外には存在しないという定理) が [19], [29] によってアナウンスされている.

もちろん, 単連結可解多様体だけでなく, コンパクト可解多様体や, 可解リー群に cohomogeneity one metric を入れた空間なども, 非常に興味深い研究対象であるが, 本稿ではそれらには触れないことにする.

[1] 大阪大学微分幾何研究集会 (坂根先生還暦記念) (2005/12/15-17) 報告集原稿

[2] 科研費若手 (B)17740039「対称空間内の超曲面に関する研究とその応用」(研究代表者: 田丸博士) の援助を受けた

また, 可解多様体の研究の動機の一つとして, それを調べるのが自然であるから, ということが挙げられる. 簡単の為に単連結リー群のみを考える (すなわち, リー環レベルで考えることとする). このとき, n 次元リー環の同型類の全体 (moduli space) は次のように表される:

$$\{\mu \in \wedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \mid \ \mu \text{ は Jacobi 律を満たす} \}/\mathrm{GL}(n).$$

半単純リー環は各次元に有限個しか存在しないが, この moduli はそれと比較すると非常に大きい. 一方で, リー環は Levi 分解によって半単純なものと可解なものに分解される. すなわち, 残りの部分を解明する為には可解リー環を研究しなくてはならない, ということが言える. しかしながら, 半単純リー環の研究には多くの蓄積があり多くの道具が知られている (例えば, 極大トーラス, ルート系, Weyl 群, Dynkin 図形, ...) ことと比較すると, 可解リー環にはまだまだ未知の部分が大きい.

本稿では, Einstein 可解多様体の構成を紹介するが, その構成の本質的な部分は, 実は, 半単純リー群の理論である. 本稿の内容は, 一般の可解群を考えるのではなく, まずは可解群の中で, 特に半単純の理論を使って分かる部分を調べる, というものである. そして, 一般の可解群, 可解多様体, Einstein 可解多様体, ... などの研究の橋頭堡を築くことが, この研究の動機である.

謝辞. まずは, 坂根由昌先生と森邦彦氏に感謝致します. 筆者がこの分野に興味を持ったきっかけは彼らの研究であり, 特に, 本稿の結果は森邦彦氏の結果 ([28]) の一般化である. 彼らの研究と, そして彼らから筆者への助言が無ければ, この研究が生まれることはなかったであろう. また, 梅原雅顕先生と阿賀岡芳夫先生に感謝致します. 彼らからはリー環の moduli に関する有益な助言を頂き, その助言は本稿の作成に大いに参考となった. 最後に, 坂根由昌先生のゼミの方々, 特に山田拓身氏, 沢井洋氏, 宇野公貴氏に, 感謝致します. 彼らには, 数学に関する部分とそれ以外の部分の両面でお世話になった.

2 準備

この節では, 実半単純リー環の放物型部分環について, 後に必要となる事柄を述べておく. 特に, 放物型部分環は, 半単純リー環の gradation と密接に関わる. 放物型部分環については, Eberlein の教科書 ([14], Section 2.17) を参考にした. 半単純リー環の gradation に関しては [23], [22], [34] などを参照.

定義 2.1 ([14]) G を非コンパクト半単純リー群, $M = G/K$ を付随する非コンパクト型対称空間とし, G の理想境界 $M(\infty)$ への作用を考える. このとき $P \subset G$ が **放物型部分群** であるとは, P が $M(\infty)$ のある点での固定部分群であること. また, 放物型部分群のリー環を **放物型部分環** (**parabolic subalgebra**) と呼ぶ.

なおここで G は実リー群を考えていることに注意 (複素リー群も, 実リー群と思って同様に扱うことが出来る).

定義 2.2 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の線型部分空間への分解 $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ が **gradation** (より正確に言うと **$\mathbb{Z}$-gadation**) であるとは, $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$ $(\forall k, l \in \mathbb{Z})$ が成り立つこと.

以降, 議論は全てリー環レベルで行う. 目的は, 放物型部分環とリー環の gradation との対応を説明することである. 本稿では, この対応を用いて, 我々の可解多様体を半単純リー環の gradation を用いて調べる.

命題 2.3 放物型部分環 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ に対し, $\mathfrak{g}$ の gradation $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ で $\mathfrak{p} = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ となるものが存在する.

証明. まずは, 放物型部分環を, ルート空間を用いて表す. 放物型部分環 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ に対し, 対応する放物型部分群が固定する点を $[\gamma] \in M(\infty)$ とする (理想境界 $M(\infty)$ は, 漸近測地線の同値類の全体であった). ここで o を $M = G/K$ の原点, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を o から決まる Cartan 分解とする. このとき測地線 $\gamma : [0, +\infty) \to M$ は, $\gamma(t) = \exp(tX)(o)$ $(X \in \mathfrak{m})$ となるものを代表元として取ることが出来る. X を含む $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}$ とし, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート系を Δ, ルート空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ とする. このとき, 次が成立する ([14] Proposition 2.17.13):

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha(X) > 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

この分解から gradation を構成する為に, X を上手く取り替える必要がある (幾何学的には, 理想境界の点を, 同じ軌道型を持つ別の点に取り替えることに対応する). X と適合する Δ の単純ルート系を $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする (i.e., $\alpha_i(X) \geq 0$ for $\forall i$). この単純ルート系に関する $\mathfrak{a}$ の双対基底を $\{H^1, \ldots, H^r\}$ とする. このとき $X = c_1 H^1 + \cdots + c_r H^r$ (ただし $c_i \geq 0$) と書ける. そこで, 係数 c_i が 0 でない部分だけを集めて, $Z := \sum_{c_i \neq 0} H^i$ と定義する. このとき, $\alpha(Z) \in \mathbb{Z}$ (for $\forall \alpha \in \Delta$). $\mathfrak{g}_k$ を ad_Z の固有値 k の固有空間とおくと, $\mathfrak{g} = \sum_k \mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{g}$ の gradation を与える. さらに, 「$\alpha(X) > 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha(Z) > 0$」であることから, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha(X)>0} \mathfrak{g}_\alpha = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ が成立する. Q.E.D.

命題 2.4 半単純リー環の gradation $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ に対し, $\mathfrak{p} := \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ は放物型部分環である.

証明. まず, 半単純リー環の gradation $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ に対して, 各 $\mathfrak{g}_k$ が ad_Z による固有値 k の固有空間となるような $Z \in \mathfrak{g}$ が唯一存在する (このような Z を **characteristic element** と呼ぶ). さらに, grade-reversing Cartan involution σ が存在する. ここで σ が **grade-reversing** とは, $\sigma(\mathfrak{g}_k) = \mathfrak{g}_{-k}$ となること (grade-reversing である為の必要十分条件は $\sigma(Z) = -Z$ である). この σ により, 非コンパクト型対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ および非コンパクト型対称空間 $M = G/K$ とその原点 o が決まる. 半測地線 $\gamma : [0, +\infty) \to M : t \mapsto \exp(tZ)(o)$ を考える. このとき, $[\gamma] \in M(\infty)$ を固定する部分群のリー環は $\sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ である (上と同様に [14] Proposition 2.17.13 から示される). すなわち, $\mathfrak{p} = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ は $\mathfrak{g}$ の放物型部分環である. Q.E.D.

命題 2.3, 2.4 より, 放物型部分環を考えることと, リー環の gradation を考えることは同値であると言える. リー環の gradation の例は, 例えば $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ の場合を考えると, 非常に分かりやすい. この場合には, gradation は行列の block 分解によって与えられる:

例 2.5 $\nu = 1, \ldots, n-1$ とする. このとき, 次のような適当なサイズの block 分解によって $\mathfrak{g}_k$ を定めると, $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R}) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k$ は gradation である:

$$
\mathrm{sl}_n(\mathbb{R}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & \cdots & \mathfrak{g}_\nu \\ \hline
\mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \ddots & \mathfrak{g}_{\nu-1} \\ \hline
\mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \ddots & \mathfrak{g}_{\nu-2} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
\mathfrak{g}_{-\nu} & \mathfrak{g}_{-(\nu-1)} & \mathfrak{g}_{-(\nu-2)} & \cdots & \mathfrak{g}_0
\end{array}\right]
$$

一般のリー環の gradation は, $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ の場合ほど簡単ではない. しかし, その構成と分類は, ルートを用いて表すことが出来る. 先に行ったように, 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の Cartan involution を σ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を対応する Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間, Δ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート系, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルート系, $\{H^1, \ldots, H^r\}$ をその双対基底とする. このとき, $Z := c_1 H^1 + \cdots + c_r H^r$ (ただし $c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とすると, ad_Z の固有値は全て整数であり, その固有空間分解は $\mathfrak{g}$ の gradation を与える. 逆に, この方法で全ての gradation は, 共役を除いて得られることが分かる.

一般に gradation の同型は, gradation を保つリー環の同型写像によって定義することが多い. しかし, 例えば characteristic element が Z の gradation と $2Z$ の gradation は, 通常の定義では同型でないが, 殆ど違いは無いと言って良いであろう (少なくとも対応する放物型部分環は同じである). 実は, 放物型部分環を考えるとき, リー環の gradation の characteristic element は $H^{i_1} + \cdots + H^{i_l}$ の形のものだけを考えれば十分である (この場合の gradation を <u>**type** α_0</u> と呼ぶ). このような type α_0 の gradation は, その characteristic element の形を見れば分かるように, Dynkin 図形の部分集合と 1:1 に対応する.

3 構成

本節では, 実半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の放物型部分環 $\mathfrak{p}$ から出発して, 可解多様体 $(\mathfrak{s}, \langle,\rangle)$ を構成する方法を紹介する (勿論, 正確には, $\mathfrak{s}$ をリー環とする単連結リー群 S に, $\langle,\rangle$ から誘導される左不変計量を入れたものを考えている). まず始めに, 知られている一般論から, 次が得られる:

- 前節の通り, gradation $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_k$ で $\mathfrak{p} = \sum_{k\geq 0} \mathfrak{g}_k$ となるものが存在する. この gradation の characteristic element を Z, grade-reversing Cartan involution を σ とする.

- 岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ で, gradation と適合するものが存在する. 取り方は, $\mathfrak{k}$ を σ の固有値 1 の固有空間, $\mathfrak{m}$ を σ の固有値 -1 の固有空間, $\mathfrak{a}$ を Z を含む $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間, 単純ルート系は Z と適合するものを選び, そして $\mathfrak{n}$ は正のルート空間全ての和, とすれば良い. 特にこのとき, $\sum_{k>0} \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{n}$ である.

- $\mathfrak{g}$ 上の内積を $B_\sigma(X,Y) := -B(\sigma(X), Y)$ によって定義する. ここで B は $\mathfrak{g}$ の Killing form. この B_σ は $\mathfrak{k}$-不変な正定値内積である.

これらの準備を踏まえて, 我々の solvmanifold を構成する.

- $\mathfrak{n}' := \sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ および $\mathfrak{a}' := Z_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{n}')$ と定義する. ここで, $\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{n}'$ は $\mathfrak{n}$ の中での $\mathfrak{n}'$ の B_σ に関する直交補空間, また, $Z_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{n}')$ は $\mathfrak{a}$ の中での $\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{n}'$ の centralizer.

- $\mathfrak{s} := \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}'$ と定める．これは明らかに可解リー環である．$\mathfrak{s}$ 上の内積 $\langle , \rangle$ を次で定義する: $\langle , \rangle := 2B_\sigma |_{\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'} + B_\sigma |_{\mathfrak{n}' \times \mathfrak{n}'}$.

以上により, 放物型部分環 $\mathfrak{p}$ に対して, 可解多様体 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ が定義された.

我々の可解多様体の特別な場合として, 出発点の放物型部分環が $\mathfrak{p}$ が極小の場合を考える．このとき, characteristic element は $\mathfrak{a}$ の regular element である．前の記号を使うと, $Z = H^1 + \cdots + H^r$. この場合, gradation が "最長" のものであり, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ が成立することが容易に確かめられる．すなわち, $\mathfrak{s}$ は岩沢分解の可解部分と一致し, 我々の可解多様体は非コンパクト型対称空間に他ならない (内積は, そうなるように定めてある).

さらに, 我々の可解多様体は, 非コンパクト型対称空間のリーマン等質部分多様体である．$\mathfrak{s}$ は明らかに $\mathfrak{g}$ の部分リー環であり, $\mathfrak{s}$ に対応する部分群の, 対称空間の原点を通る軌道が, 我々の可解多様体に他ならない.

4　主定理

この節では, 以下の定理の証明の概略を述べる．証明の方針を先に述べておくと, $\dim \mathfrak{a}'$ に関する帰納法である.

定理 4.1 前節の方法で放物型部分環から構成された可解多様体 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ は Einstein であり, その Einstein 定数は $-(1/4)$.

この定理は, 任意の半単純リー環の任意の放物型部分環に対し, その巾零根基は Einstein 可解拡大を持つ, ということを主張する．前節で紹介した可解多様体の構成は, その Einstein 可解拡大の具体的な形も与えていることになる．また, 出発点の放物型部分環が極小な場合 (すなわち $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ が対称空間の場合), この定理が正しいことは, 対称空間の一般論で知られている．以下, 前節までに定義した記号を断り無く使う.

補題 4.2 $Z = H^{i_1} + \cdots + H^{i_k}$ を characteristic element とする gradation に対し, それから構成される可解多様体 $(\mathfrak{s} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}', \langle , \rangle)$ は次を満たす:

$$\mathfrak{n}' = \sum_{\alpha(Z) > 0} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{a}' = \mathbb{R}H^{i_1} + \cdots + \mathbb{R}H^{i_k}.$$

証明は非常に基本的である: $\mathfrak{n}'$ に関する主張は, characteristic element の定義から容易に示され, $\mathfrak{a}'$ に関する主張は, $\mathfrak{a}'$ および H^i の定義と $\mathfrak{n}'$ の表示から示される.

ここから, 主定理の証明の概略を述べる．既に述べたように, $\dim \mathfrak{a}'$ に関する帰納法で証明する．まずは $\dim \mathfrak{a}' = 1$ の場合だが, これは本質的に [35] で示されている (explicit には書かれていないが $\cdots$).

命題 4.3 ([35]) 我々の可解多様体 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ は, $\dim \mathfrak{a}' = 1$ のとき Einstein であり, その Einstein constant は $-(1/4)$.

この命題の証明の方針を一言で述べると, Ricci 曲率 ric をルートを使って表示して計算することである．具体的には, 以下の手順で求めることが出来る.

- まず $\dim \mathfrak{a}' = 1$ であることから, characteristic element は $Z = H^i$ の形として良い.

- 定義より $\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_\nu$ である. さらに, ルート系の分類表を眺めると $\nu \leq 5$ であることが分かる.

- 各 $\mathfrak{g}_k$ の正規直交基底 $\{E_j^{(k)}\}$ に対して, $Z_k := \sum [\sigma(E_j^{(k)}), E_j^{(k)}]$ と定義する.

- Z_k はルートを使って表すことが出来る. 実際, $\alpha(Z) = k$ を満たすルートのルートベクトルを重複度を込めて足し合わせたものが Z_k になる. 特に, Z と Z_k は平行である (これは $\dim \mathfrak{a}' = 1$ のときにしか一般には言えない).

- Ricci 曲率は Z_k を用いて表すことが出来る. 例えば,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ric}(A) &= -(1/4)A \qquad \text{for } A \in \mathfrak{a}', \\
\mathrm{ric}(U_1) &= -(1/2)\sum k[Z_k, U_1] \qquad \text{for } U_1 \in \mathfrak{g}_1, \\
\mathrm{ric}(U_2) &= -(1/4)\sum k[Z_k, U_2] \qquad \text{for } U_2 \in \mathfrak{g}_2, \\
\mathrm{ric}(U_3) &= -(1/4)[Z_1 + Z_2 + 2Z_3, U_3] \qquad \text{for } \nu = 3 \text{ and } U_3 \in \mathfrak{g}_3.
\end{aligned}
$$

- 計算により $\sum k Z_k = (1/2)H^i$ であることが分かる (これも $\dim \mathfrak{a}' = 1$ の仮定が必要). よって, $\nu = 2$ ならば自動的に Einstein になる.

- 例外型リー環の gradation を考えると, $\dim \mathfrak{a}' = 1$ の場合にも $\nu > 2$ となる gradation が存在する. そのような場合の Ricci 曲率は, 個別にルートを数え上げることによって計算する.

次に $\dim \mathfrak{a}' = k$ の場合に solvmanifold が Einstein だと仮定し, $\dim \mathfrak{a}' = k+1$ の場合も Einstein であることを示す.

- $\dim \mathfrak{a}' = k+1$ のとき, characteristic element は $Z = H^{i_1} + \cdots + H^{i_{k+1}}$ として良い.

- まず, $A \in \mathfrak{a}'$ に対して $\mathrm{ric}(A) = -(1/4)A$ となることは, 比較的容易に証明できる.

- 次に $X \in \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}'$ をとる. このとき, $\mathrm{ric}(X) \in \mathfrak{g}_\alpha$ であることの証明も比較的容易.

- 上の α に対し, $\alpha(Z - H^{i_j}) > 0$ を満たす H^{i_j} が存在する. このとき, $Z' := Z - H^{i_j}$ を characteristic element とする gradation を考えることができ, それから構成される solvmanifold を $(\mathfrak{s}', \langle,\rangle)$ とすると, $X \in \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{s}'$ となる.

- $(\mathfrak{s}', \langle,\rangle)$ の Ricci 曲率を ric' とする. このとき実は $\mathrm{ric}'(X) = \mathrm{ric}(X)$ が成り立つ. ric および ric' は, それぞれ $\mathfrak{s}$ および $\mathfrak{s}'$ の正規直交基底を用いた式として書ける. $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s}$ であるので, $\mathrm{ric}(X)$ は $\mathrm{ric}'(X)$ と比べると「$\mathfrak{s} \ominus \mathfrak{s}'$ の分」だけ「お釣り」が出る. そしてその「お釣り」は 0 となるのだが, それは Weyl 群の作用による対称性などを考察することによって示される.

5　関連する話題と問題

5.1　Rank one reduction, eigenvalue type

可解多様体が $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ が **standard** であるとは, $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$, $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^{\perp}$ としたとき, $\mathfrak{a}$ が可換となることである．我々の構成した可解多様体は standard であり, standard でない Einstein 可解多様体は今のところ知られていない．Heber ([18]) は standard Einstein 可解多様体について, 非常に深くまた本質的な結果を得ている．その結果の一つに rank one reduction と呼ばれるものがある．可解多様体に対し, $\dim \mathfrak{a}$ を **階数** (**algebraic rank**) と呼ぶ.

定理 5.1 ([18]) 全ての standard Einstein 可解多様体 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ に対して, $(\mathbb{R}H_0 + \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ が Einstein となるような $H_0 \in \mathfrak{a}$ が存在する．逆に, rank one Einstein 可解多様体 $(\mathbb{R}H_0 + \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ に対して, $H_0 \in \mathfrak{a}$ となる standard Einstein 可解多様体 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ を復元することが出来る.

前者の rank one Einstein 可解多様体の存在の証明は, H_0 を具体的に求めることで行われる．H_0 として, ($\mathfrak{n} \subset \mathfrak{s}$ に関する) mean curvature vector を取れば良い (H_0 が mean curvature vector である為の条件は, $\langle H_0, A \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A)$ for $\forall A \in \mathfrak{a}$)．逆の higher rank のものを復元することに関しては, automorphism 群を用いる必要があるので, あくまで「原理的には出来る」というレベルであり, 実際に求めることは困難であると思われる.

Heber ([18]) は, この rank one reduction の考え方を用いて, 以下のような代数的不変量を導入した:

命題 5.2 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ を standard Einstein 可解多様体, $H_0 \in \mathfrak{a}$ を mean curvature vector とする．このとき $\exists c$ s.t. $\mathrm{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ の固有値は全て自然数．このときの固有値 μ_i とその重複度 d_i の組 $(\mu_1, \ldots, \mu_m; d_1 < \cdots < d_m)$ を **eigenvalue type** と呼ぶ.

例えば Damek-Ricci space の eigenvalue type は $(1, 2; d_1 < d_2)$ である (d_2, d_1 は, H-type Lie algebra の center とその直交補空間の次元)．森 ([28]) の構成した Einstein 可解多様体の eigenvalue type も同様．しかし, 我々の構成した Einstein 可解多様体は, 一般には two-step でないので, より複雑な eigenvalue type を持つ．さらに, 我々の Einstein 可解多様体は, two-step であって eigenvalue type が $(1, 2; d_1 < d_2)$ とならないものを含んでいる．ちなみに, 我々の Einstein 可解多様体の eigenvalue type を求めることは, ケースバイケースの計算になり手間はかかるが, 困難ではない (mean curvature vector はルートを使って計算できる).

5.2　Einstein solvmanifold の moduli

Einstein 可解多様体の moduli を考える為に, 内積の入った n 次元実リー環の等長類の全体の成す moduli を考える．その moduli は, 次の集合と同一視できる:

$$\{\mu \in \wedge^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \mid \ \mu \text{ は Jacobi 律を満たす}\}/\mathrm{O}(n).$$

ここで, $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積 $\langle , \rangle$ を一つ固定して考えていることに注意. 任意の内積は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の作用で標準的なものに移ることから, 上記の集合で, $\mathbb{R}^n$ 上の全ての bracket 積と全ての内積を考

えていることになる (内積の取替えは, bracket の取替えに吸収される). この moduli そのものを直接調べることは, 非常に困難であると思われる. 低次元の場合には, 阿賀岡 ([1], [2]), 田崎-梅原 ([32]) などの結果があり, 低次元かつ two-step nilpotent の制約を加えた場合の最近の結果として Console-Fino-Samiou ([12]) がある.

Heber は, 共通の eigenvalue type を持つ Einstein 可解多様体の moduli についての研究を行った ([18], Section 6). 特に, 階数 1 の非コンパクト型対称空間の近傍での moduli 空間の次元を計算している. 例えば, 四元数双曲空間 $\mathbb{H}\mathrm{H}^{m+1}$ ($m \geq 2$) の近傍での moduli の次元は $8m^2 - 6m - 8$ である ([18], Theorem 6.19). このことを踏まえて Kerr ([24]) は, $\mathbb{H}\mathrm{H}^3$ の連続変形を具体的に与えている. Kerr の用いた手法は, Gordon-Kerr ([17]) の論文で与えられた方法であり, その手法を非常に大雑把に言えば, bracket の dual operator J の像を行列で書き表す, というものである.

我々は, Einstein 可解多様体の moduli の研究に興味がある. その最初の段階として, 我々の構成した Einstein 可解多様体 (あるいはその他の知られている Einstein 可解多様体) の "変形" の研究は, 興味ある問題であると思われる. また, 内積の付いたリー環の moduli の中で (あるいは内積の付いた可解リー環の moduli の中で), Einstein 可解多様体の moduli はどのような集合となるか, なども興味深い問題であろう.

5.3 断面曲率

我々の構成した Einstein 可解多様体の断面曲率が負 (または非正) となるか, というのは自然な問題である. 我々の可解多様体が 非正曲率を持つ左不変計量を持つ (より詳しく言うと, $cB_\sigma \mid_{\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'} + B_\sigma \mid_{\mathfrak{n}' \times \mathfrak{n}'}$ から決まる左不変計量を考えたとき, c が十分大きければ非正曲率である) ことが知られている ([21], [5]). 問題は, ちょうど Einstein となる場合 (すなわち $c = 2$ の場合) に, その断面曲率がどうなっているか, である. ちなみに森 ([28]) の結果から, 我々の Einstein 可解多様体の中には, 負曲率になるものもあれば, 非正曲率にならないものもある. しかし一般の場合に断面曲率を計算することは, 非常に困難であると思われる.

一般の場合に比べて, nilpotent part が two-step の場合には, 計算が多少は簡単になると思われる. 断面曲率の計算には, bracket の dual operator J が重要な役割を演じる. ここで $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} + \mathfrak{v}$ に対し, $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ は次で定義される: $\langle Z, [U, V] \rangle = \langle J_Z U, V \rangle$. 我々の Einstein 可解多様体の nilpotent part が two-step のとき, すなわち $\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ のとき, operator $J : \mathfrak{g}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)$ は次を満たす: $J_Z(U) = [Z, \sigma(U)]$. このような性質を用いて, 宇野 ([38]) はある種の可解多様体の断面曲率を求めることに成功している.

参考文献

[1] Y. Agaoka, On the variety of 3-dimensional Lie algebras, *Lobachevskii J. Math.* **3** (1999), 5–17.

[2] Y. Agaoka, An algorithm to determine the isomorphism classes of 4-dimensional complex Lie algebras, *Linear Algebra Appl.* **345** (2002), 85–118.

[3] D. V. Alekseevskii, Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature, *Mat. Sb.* **25** (1975), 87-109; English translation, *Math. USSR-Sb.* **96** (1975), 93–117.

[4] D. V. Alekseevskii, Classification of quaternionic spaces with transitive solvable group of motions, *Math. USSR-Izv.* **9** (1975), 297–339.

[5] R. Azencott, E. N. Wilson, Homogeneous manifolds with negative curvature. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **215** (1976), 323–362.

[6] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lect. Notes in Math. **1598** (1995), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[7] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. **10** (1987), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[8] J. Boggino, Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **43** (1985), 529–547.

[9] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre IV – VI*, Éléments de Mathématique, Masson, Paris, 1981.

[10] R.L. Bryant and S. Salamon, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, *Duke Math. J.* **58** (1989), no. 3, 829–850.

[11] V. Cortés, Alekseevskian spaces, *Diff. Geom. Appl.* **6** (1996), 129–168.

[12] S. Console, A. Fino, E. Samiou, The moduli space of six-dimensional two-step nilpotent Lie algebras, *Ann. Global Anal. Geom.* **27** (2005), no. 1, 17–32.

[13] E. Damek, F. Ricci, Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups. *J. Geom. Anal.* **2** (1992), 213–248.

[14] P.B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1996.

[15] P. Eberlien, J. Heber, Quarter pinched homogeneous spaces of negative curvature, *Internat. J. Math.* **7** (1996), 441–500.

[16] M. Goze, Y. Khakimdjanov, *Nilpotent Lie algebras*, Mathematics and its Applications, **361**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[17] C. S. Gordon, M. Kerr, New homogeneous Einstein metrics of negative Ricci curvature, *Ann. Global Anal. Geom.* **19** (2001), 75–101.

[18] J. Heber, Noncompact homogeneous Einstein spaces, *Invent. Math.* **133** (1998), 279-352.

[19] J. Heber, On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces, math.DG/0409347.

[20] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[21] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature, *Math. Ann.* **211** (1974), 23–34.

[22] S. Kaneyuki, On the subalgebras $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{\mathrm{ev}}$ of semisimple graded Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan* **45** (1993), 1–19.

[23] S. Kaneyuki, H. Asano, Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems, *Nagoya Math. J.* **112** (1988), 81–115.

[24] M. Kerr, A deformation of quaternionic hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 2, 559–569.

[25] J. Lauret, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), 715–733.

[26] J. Lauret, Finding Einstein solvmanifolds by a variational method, *Math. Z.* **241** (2002), 83–99.

[27] J. Lauret, Minimal metrics on nilmanifolds, *Diff. Geom. Appl.*, Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 79–97.

[28] K. Mori, Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci-type solvable Lie groups, *Osaka J. Math.* **39** (2002), 345–362.

[29] Y. Nikolayevsky, Harmonic homogeneous manifolds of nonpositive curvature, math.DG/0407024.

[30] S. Nishikawa, Harmonic maps and negatively curved homogeneous spaces, *Geometry and topology of submanifolds X* (Eds. W. H. Chen et. al.), World Sci. Publishing, Singapore, 2000, 200–215.

[31] I. I. Pyateskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

[32] H. Tasaki, M. Umehara, An invariant on 3-dimensional Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 293–294.

[33] H. Tamaru, The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups, *Diff. Geom. Appl.* **11** (1999), 29–38.

[34] H. Tamaru, On certain subalgebras of graded Lie algebras, *Yokohama Math. J.* **46** (1999), 127–138.

[35] H. Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, preprint.

[36] H. Tamaru, A class of noncompact homogeneous Einstein manifolds, *Diff. Geom. Appl.* Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005, 119-127.

[37] H. Tamaru, Parabolic subgroups and Einstein solvmanifolds, in preparation.

[38] M. Uno, On sectional curvature of Boggino-Damek-Ricci type spaces, *Tokyo J. Math.* **23** (2000), no. 2, 417–427.

[39] T. H. Wolter, Einstein metrics on solvable Lie groups, *Math. Z.* **206** (1991), 457–471.