2004 年度教養ゼミ　　担当：田丸

0　教養ゼミについて

高校までの数学と大学の数学科で学ぶ数学には大きな違いがありますが, 恐らく最初に戸惑う部分は「数学的な言葉」に対してだと思います. 数学の講義は数学的な言葉で行われますし, 数学の教科書も数学的な言葉で書かれています. それは勿論, 便利だから使われているのですが, 敷居が高いことは確かです. そこで, 私の担当する教養ゼミでは,

「数学的な言葉に慣れ, 正しく使えるようになること」

を目標とします. 数学的な言葉に慣れることは, 数学を理解する為に必要であり, 自分の考えたことを他の人に伝える為にも必要です. またそれだけでなく, 自分の考えを自分の中でまとめる為にも有用ですし, 「どのように考えるか」という考え方そのものにも影響を与えることでしょう.

上記の目標を達成する為, この教養ゼミでは, 配布する演習問題を基にして行います. 演習問題は「数学的な言葉の習得」に相応しいトピックを選んで作成します（集合・写像・極限などの予定）. 演習問題を解く・解答を作成する・発表する・他の人の発表を聞く, ということを通して, 数学的な言葉に慣れていくことが目標です. 発表は, こちらが順に問題を振り分けますので, 担当になった問題を授業時間に黒板で発表をして貰います（当然, 他の人の担当の問題も, あらかじめ考えておいた方が良いことは言うまでもありません）. 発表している間は先生です. 他の学生に教えるつもりで準備をし, 発表して下さい. また, 発表者以外の学生は, 発表を聞き, おかしな点や分からない部分があったら,

発表の途中であっても, 積極的に質問・議論をして下さい.

テキストは特に指定しません. 配布するプリントがテキストです. 他の数学の講義で指定されたテキストも参考になるでしょう. 一応, 副読本として, 「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」（飯高茂/編・監修:講談社）を推薦しておきます.

成績は, テスト・レポート・発表内容・参加態度によって決定します.

こちらからのテスト・レポート・休講等の連絡は, 基本的に授業時間中に全て伝えます. また, 下記の web page でもお知らせします. 私への質問・コメント等の連絡がある場合には, 授業時間中でなくても構わないので, 適宜捕まえて下さい.

田丸 博士（たまる ひろし）
研究室：理学部 C-613
e-mail：tamaru @ math.sci.hiroshima-u.ac.jp
url：http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/index-j.html

1　論理記号

数学的な言葉は, 全て論理記号で書かれています. まずはそれに慣れる為の演習問題.

定義.　次の記号は, 以下の意味で使うものとする:

$\forall$	$\cdots$	for all（全ての... に対して）,
$\exists$	$\cdots$	exist（... が存在する）,
s.t.	$\cdots$	such that（... であるような）.

ただし,「 s.t. 」は省略して単に「 : 」と書くことが多い.

例題.　$X := \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする. 次の命題が正しいかどうか判定せよ.

(1) $\forall a \in X,\ \exists b \in X\ :\ b$ は a に勝つ.
(2) $\exists b \in X\ :\ \forall a \in X,\ b$ は a に勝つ.

注意.　この２つの命題は, 書かれている言葉は同じで順序が違うだけですが, 意味が全く違います. 順序はとても大事です. (1) では a を決めた後で b を決めますが, (2) では b を決めた後で a を決めます. ですから, 証明を書くときには, その順序が分かるように正確に書かなくてはいけません. それを一言で言うと,「定義に従って証明する」となります.「定義に従った証明」を身につけることが, この教養ゼミでの半年間の目標と言っても過言ではありません.

問 1.　$\mathbb{R}$ を実数全体の集合, A をその部分集合とする. 以下のそれぞれの条件を説明し, 条件をみたす例とみたさない例を挙げ, それを証明せよ.

(1) $\forall a \in A,\ \exists b \in A\ :\ a + b \in A.$
(2) $\exists a \in A\ :\ \forall b \in A,\ a + b \in A.$
(3) $\forall a \in A,\ \exists b \in A\ :\ a > b.$
(4) $\exists a \in A\ :\ \forall b \in A,\ a \geq b.$
(5) $\forall M > 0,\ \exists a \in A\ :\ M < a.$
(6) $\forall a, b \in A,\ (a, b) \subset A.$
(7) $\forall a \in A,\ \exists \varepsilon > 0\ :\ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A.$
(8) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A\ :\ 0 < a < \varepsilon.$

定義.　実数 a, b に対し, $(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ と定め, このような集合を**開区間**と呼ぶ. また $[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ の形の集合を**閉区間**と呼ぶ.

海原雄山語録:
　カレーの定義だ。
　辛ければカレーなのか。
　色が黄色であればカレーなのか。
　スパイスを調合したと言ったが、
　これを欠いたらカレーでなくなるというスパイスはなんだ。

2　実数の数列

実数の数列に関しては解析学でも扱われると思いますが,「きちんと証明を書く」訓練をするには良い題材なので, ここでも取り上げます. きちんと証明を書いて下さい.

定義.　数列 a_n が a **に収束する**ことを次で定義: $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N:\ \forall n > N,\ |a_n - a| < \varepsilon.$

注意.　以下の問題では「証明をきちんと書く」ことを目標としています. そこで最初にまず「証明すること」を記号で書くようにしましょう. 証明は何から始めて何で終われば良いのか, 何をすれば証明したことになるのか, ということを理解して下さい.

問 2.　数列 $a_n := \dfrac{1}{n}$ が 0 に収束する事を示せ.

問 3.　数列 $a_n := 2^{-n}$ が 0 に収束する事を示せ.

問 4.　数列 $a_n := \dfrac{n}{n+1}$ が 1 に収束する事を示せ.

問 5.　c を実数とする. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束する時, 数列 $b_n := c \cdot a_n$ は ca に収束する事を示せ.

問 6.　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が a, b にそれぞれ収束する時, 数列 $c_n := a_n + b_n$ は $a + b$ に収束する事を示せ.

定義.　数列 a_n が $+\infty$ **に発散する**ことを次で定義: $\forall M > 0,\ \exists N:\ \forall n > N,\ a_n > M.$

問 7.　数列 $a_n := \dfrac{n}{2}$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

問 8.　数列 $a_n := 2n + 3$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

問 9.　$c > 0$ を実数とする. 数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとき, 数列 $b_n := c \cdot a_n$ も $+\infty$ に発散することを示せ.

問 10.　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が共に $+\infty$ に発散するとき, 数列 $c_n := a_n + b_n$ も $+\infty$ に発散することを示せ.

問 11.　数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散し, 数列 $\{b_n\}$ が 0 に収束しているとする. 数列 $c_n := a_n + b_n$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

問 12.　数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散し, さらに $a_n \neq 0\ (\forall n)$ をみたすとする. 数列 $b_n := \dfrac{1}{a_n}$ は 0 に収束することを示せ.

問 13.　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束し, さらに $a_n > 0\ (\forall n)$ をみたすとする. 数列 $b_n := \dfrac{1}{a_n}$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

3　写像・全射・単射

写像に関しては「数学概説」でも習っていると思われるが, ここでは特に全射・単射という性質を扱う. 前節までと同様に「何を示せば良いか」を明確にすることが重要.

定義.　集合 X, Y に対し, 全ての X の元に対して Y の元を一つ決める対応を**写像**と呼ぶ. 記号「$f : X \to Y : x \mapsto f(x)$」によって, f が X から Y への写像であり $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が対応することを表す.

定義.　写像 $f : X \to Y$ が**全射**である $:\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y,\ \exists x \in X\ :\ f(x) = y$.

定義.　写像 $f : X \to Y$ が**単射**である $:\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$,「$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$」.

問 14.　次の写像 f の全射性・単射性を予想し, それを証明せよ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x|$.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

問 15.　写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し, 次を示せ.

(1) f, g が共に全射ならば $g \circ f$ も全射.
(2) f, g が共に単射ならば $g \circ f$ も単射.
(3) $g \circ f$ が単射ならば f は単射.
(4) $g \circ f$ が全射ならば g は全射.

定義.　集合 X 上の**恒等写像** 1_X とは, 次を満たす写像: $\forall x \in X,\ f(x) = x$.

定義.　$g : Y \to X$ が $f : X \to Y$ の**逆写像**であることを次で定義: $f \circ g = 1_Y,\ g \circ f = 1_X$.

注意.　逆写像は存在するとは限りません.

問 16.　写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$ の逆写像を求め, それが逆写像であることを示せ.

問 17.　写像 $f : X \to Y$ は, 逆写像が存在すれば全単射であることを示せ.

定義.　集合 X, Y の**配置集合**を次で定義する: $\mathrm{Map}\{X, Y\} := \{f : X \to Y : 写像\}$.

問 18.　写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, x)$ と集合 X に対し, 次の写像 f_* の単射性を示せ:

$$f_* : \mathrm{Map}\{X, \mathbb{R}\} \to \mathrm{Map}\{X, \mathbb{R}^2\} : h \mapsto f \circ h.$$

問 19.　写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$, 集合 X に対し, 次の写像 f_* の全射性を示せ:

$$f_* : \mathrm{Map}\{X, \mathbb{R}^2\} \to \mathrm{Map}\{X, \mathbb{R}\} : h \mapsto f \circ h.$$