曲線の微分幾何

— 高速道路のジャンクションは何であんな形なのか —

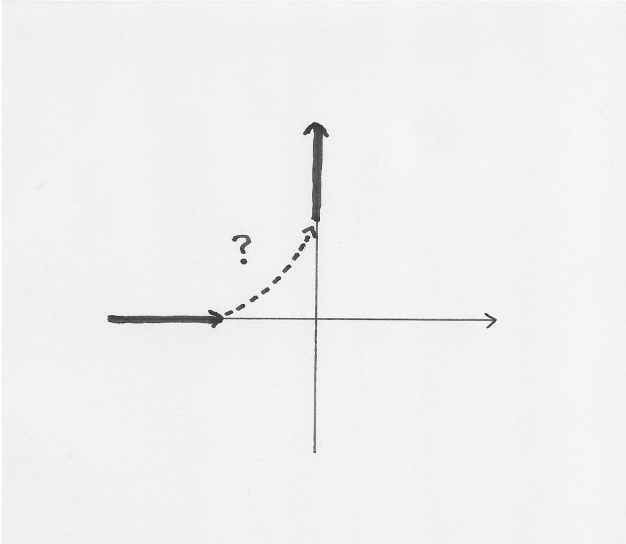
田丸 博士　（広島大学・大学院理学研究科）

0　はじめに

高速道路のジャンクションとは, ここでは, ２つ以上の高速道路が結合している部分のこととしておきます（ジャンクションとインターチェンジは違うとか, 細かいことは気にしないで下さい）. 話を簡単にする為に, ２つの高速道路が直交しているとします. そして, その一方の道路と他方の道路を繋ぐような道を作りたいとします. さて, 一体どのような道を作れば良いでしょうか, あるいは, どのような方針で設計すれば良いでしょうか. はるか昔は「職人の経験と勘で設計」していたかも知れませんが, 現在ではそうではありません. ではどうすれば良いのでしょうか. — 今回は, このような高速道路のジャンクションの問題を題材にして, 平面曲線の微分幾何学を紹介したいと思います.

ジャンクションの一例

今回の話では, 高速道路のジャンクションは非常に単純化して考えることにします. 道路の幅は無視して単なる曲線だと思うことにします. また, 本来は立体交差しているので高低差を考慮すべきですが, それも無視することにします. つまり, 高速道路を平面（高校の教科書では xy-平面とか座標平面と呼ばれているもの）の中に描かれた曲線, **平面曲線**として扱うことにします. そして, x-軸の道路と y-軸の道路を結ぶ最適な曲線を見付けよ, という問題を考えることにします.



図に於いて最適な曲線を見付けよ

この問題を解く為に, 我々は微分という道具を使います. このような, 曲線（あるいは曲面や空間など）の問題を微分という手法を用いて研究する分野を **微分幾何学** と呼びます. この微分幾何という考え方は, 実は高校数学でも登場します. （微分可能な）関数 $y = f(x)$ のグラフを描く際に, 1 階微分を調べると「増加している・減少している」が分かって, 2 階微分を調べると「上に凸である・下に凸である」が分かる, ということを学んだ（あるいはこれから学ぶ）と思います. これは典型的な微分幾何です（微分という手法を使って増減表を書いたりして関数のグラフの幾何学的性質を調べています）. 今回の話は, これを発展させたものです. 曲線がどっちに曲がっているかだけでなく, 「どのくらい曲がっているか」を調べて, 数値で表します. この曲がり具合を表す数値を **曲率** と呼びます. この曲率が今回の話の主役です.

1　曲線の定義

今回, 高速道路の設計を平面曲線の問題に置き換えて調べていきます. そこでまず, 扱う対象である「曲線」を定義します. 特に, 微分幾何的な考察をする関係上, 曲線は微分できるような対象でなくてはなりません. これは, 直感的には「曲線がなめらかである」（尖っている点が無い）ことを要請する, という意味です.

曲線の定義に必要な用語を少し定義しておきます. まず, $I = (a, b)$ で開区間を表すとします（(a, b) は $\{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$ という集合を表します）. そして写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ を考えます（定義域が I で値域が $\mathbb{R}^2$ となる写像の意味です）. $t \in I$ に対して $c(t) \in \mathbb{R}^2$ が決まりますが, これを座標で $c(t) = (x(t), y(t))$ と書くことにします. このような状況をまとめて, $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ と表します.

定義 1.1 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ が次の 2 つの条件を満たすとき, c またはその像 $c(I)$ を **なめらかな平面曲線** と呼ぶ:

(1) $x(t)$, $y(t)$ が（何回でも）微分可能な関数である,

(2) 全ての $t \in I$ に対して $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ が成立する.

要するに, 我々は曲線を媒介変数表示で表しています（高校の教科書では, $x = g(t)$, $y = h(t)$ と表記しているようですが, 新しい記号を増やすと面倒なので, これを $(x(t), y(t))$ と表します）. 曲線とは, 時刻 t での点の位置が $(x(t), y(t))$ になっているような点の運動（またはその軌跡）を表しています. 先に述べたように, 条件 (1) は, 曲線のなめらかさ（微分可能であること）を保証しています. 条件 (2) を説明する為に, 用語を定義します.

定義 1.2 なめらかな平面曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ に対して, $c'(t) = (x'(t), y'(t))$ を **速度ベクトル**, $c''(t) = (x''(t), y''(t))$ を **加速度ベクトル** と呼ぶ.

この用語も高校の教科書に登場していて, 速度ベクトルを $\vec{v}$, 加速度ベクトルを $\vec{a}$ などと書いているようですが, やはりこれも記号を増やすと覚えられなくなるので, c', c'' で表すことにします. なめらかな平面曲線の定義の条件 (2) は, 速度ベクトルが $(0, 0)$ にならない（すなわち速度が 0 にならない）ことを要請しています. 車が, 時刻 t に $(x(t), y(t))$ の位置にいるように走っているとき, 定義の条件はそれぞれ (1) スピンターンしない, (2) 途中で止まらない, ということを意味します.

例 1.3 $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする半径 r の円周は, なめらかな平面曲線.

証明. 原点を中心とする半径 r の円周とは, $x^2 + y^2 = r^2$ を満たす点の全体です. これを媒介変数表示して, 条件 (1)(2) を満たすことを証明すれば良いことになります. 媒介変数表示としては, いろいろありますが,

$$c(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$$

という表示が最も簡単であると思われます. 条件 (1)(2) の証明は省略. Q.E.D.

例 1.4 何回でも微分できる関数 f に対して, $y = f(x)$ のグラフはなめらかな平面曲線.

証明. ここでも証明には, $y = f(x)$ のグラフを改めて媒介変数表示してあげれば良いことになります. 答えをいきなり書いてしまうと, $c(t) = (t, f(t))$ とすれば良いことが分かります（こうすると条件 (1)(2) を満たしていることは, 各自確かめてみよう）. Q.E.D.

余談ですが, 関数のグラフはなめらかな平面曲線ですが, なめらかな平面曲線が関数のグラフになるとは限りません. では, いつグラフになるのか, 全体ではグラフにならなくても部分的にはグラフになるのか, という疑問は自然に湧いてくると思われます. この答えは, 大学に入って解析学（微積分を扱う科目）を履修すると, 分かるようになります（多分）.

2 曲線の曲率

前の節では, なめらかな平面曲線（面倒なので単に曲線と呼ぶことにします）を定義し, 速度ベクトルと加速度ベクトルの定義を紹介しました．この節では, 曲線の曲率を定義します．先に種明かしをすると, 加速度ベクトルを使います．車でも電車でもジェットコースターでも, 急カーブでは大きな加速度（遠心力でも可）を感じます．この加速度の大きさを用いて曲がり具合を測ろう, というのが基本的な考え方です.

とは言っても, 同じカーブを曲がるのでも, 速い速度で曲がるのと遅い速度で曲がるのでは, 加速度は当然のように違ってきます．ですから, 単に加速度ベクトル $c'' = (x''(t), y''(t))$ を眺めていても, 曲がり具合は見えてきません．そこで, あらかじめ決めておいた速度で走って, その速度で走った時の加速度を調べる, ということをします.

定義 2.1 なめらかな平面曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ の速度ベクトルの大きさが常に 1 であるとき, c を曲線の <u>**弧長パラメータ表示**</u> と呼ぶ.

速度ベクトルの大きさは,

$$|c'(t)| = |(x'(t), y'(t))| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

によって計算できます．与えられた曲線が最初から弧長パラメータ表示だった場合には, それを確かめることは容易です（微分さえ出来れば良い）.

例 2.2 原点を中心とする半径 r の円周に対し, 次の媒介変数表示は弧長パラメータ表示:

$$c(t) = (r\cos(\frac{t}{r}), r\sin(\frac{t}{r})).$$

証明は省略．このように上手く弧長パラメータ表示できれば良いのですが, 一般に与えられた媒介変数表示を弧長パラメータ表示に取り替えることは, 簡単ではありません（というか面倒です）．ということで, そこには足を踏み入れないことにして, 最初から曲線の弧長パラメータ表示が与えられたと思って, 以下の話は進めます．一般の媒介変数表示と区別をする為に, 曲線の弧長パラメータ表示の変数を s と表すことにします．すなわち, $c(s) = (x(s), y(s))$ です.

定義 2.3 $c : I \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto (x(s), y(s))$ をなめらかな平面曲線の弧長パラメータ表示とする．このとき, 曲線 c の $c(s)$ における <u>**曲率**</u> $\kappa(s)$ を, 加速度ベクトルの大きさで定義する．すなわち,

$$\kappa(s) = |c''(s)| = \sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2}.$$

直線の曲率が 0 になることは, 定義から確かめられます（確かめてみよう）. 円の場合には, 半径が小さい方がきつく曲がっていて, 半径が大きい方が緩やかに曲がっているはずです. そのことは, 次の計算から確かめることが出来ます.

例 2.4 半径が r の円周の曲率は, 全ての点において $1/r$ である.

証明. 弧長パラメータ表示 $c(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r))$ を使って計算します. 2 階微分をすれば良いので, 真面目に計算します:

$$
\begin{aligned}
c'(s) &= (-\sin(s/r), \cos(s/r)), \\
c''(s) &= (-(1/r)\cos(s/r), -(1/r)\sin(s/r)).
\end{aligned}
$$

このことから, $|c''(s)| = 1/r$ が得られました（半径 r は正です）. Q.E.D.

曲線 c 上の点 $c(s)$ における曲率が $\kappa(s)$ であるとは, 「半径が $1/\kappa(s)$ の円と同じだけ曲がっている」ということを意味しています. こちらの表示の方が感覚的には分かりやすいので, 道路標識などに利用されています. 下の写真の「$R = 50m$」は, 「このカーブは半径が $50m$ の円と同じだけ曲がってますよ」ということを注意しています.

カーブの曲がり具合を表す標識

ここで注意ですが, この曲率の定義は, 大抵の数学の本に載っている（すなわち一般的に採用されている）定義とは, 正確には違うものです. ここでは曲率を「加速度の大きさ」で定義した為, 曲率が負になることはあり得ません. 全く同じだけ右向きに曲がった場合と左向きに曲がった場合には, 曲率は等しくなります. しかし, 数学で採用されている定義では, 右向きに曲がったものと左向きに曲がったものは区別するのが普通です（左向きに曲がったものが正の曲率, 右向きに曲がったものが負の曲率, となるように定義します）. そのようなちゃんとした曲率の定義は, 参考文献に挙げた本に書いてあります（というか曲線を扱ってる数学書ならどれにでも書いてある）ので, 眺めてみて下さい.

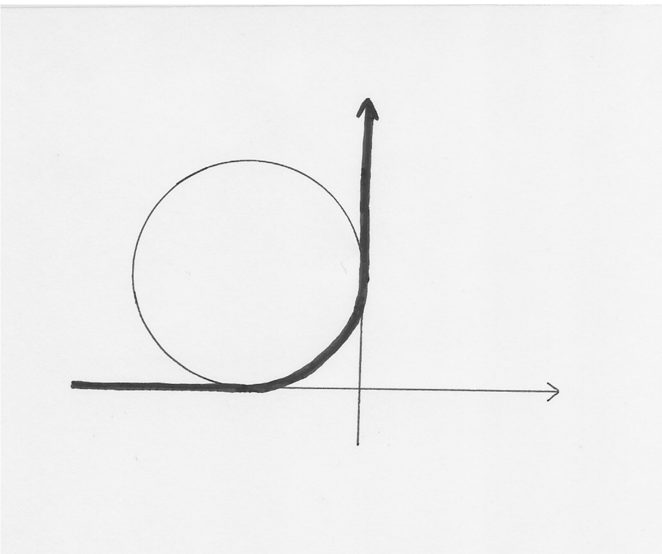
3　ジャンクションに使われる曲線の条件

ではいよいよ, 高速道路のジャンクションの設計をしたいと思います．設計の目的は,「いかに走りやすい道路を作るか」ということにあります．しかし,「走りやすい道路」とは言っても, それだけではちょっと漠然としていて手が付けられません．走りやすい道路になる為の条件を, 数学的に定式化する必要があります．それを考えてみましょう．

観察 3.1 曲線 c で表される道路を車で走っているとき, 曲率が大きな点ではハンドルを大きく切り, 曲率が小さな点ではハンドルは小さく切る必要がある．

このことは, ハンドルを大きく切ったまま走れば（半径が）小さな円を描き, 小さく切ったまま走れば大きな円を描く, ということから分かると思います．このように, 曲率とハンドルの角度は密接な関係にあります．

観察 3.2 直交する道路を円で結んだ道路は, 2 回急ハンドルを切らなくてはならない．



直交する 2 直線を円の一部で繋ぐ図

上の図のような道路を, x-軸の負の方向から来て, y-軸の正の方向に向かって走るとします．x-軸の上では, 曲率は 0 なのでハンドルは真っ直ぐです．円の部分に差し掛かると, そこではハンドルを（その円の半径に従って）一定の角度で切らなくてはなりません．y-軸の上に来たら, またハンドルは真っ直ぐになります．つまり, 直線と円の接点の部分で（すなわちカーブに入るときと出るときに）, 2 回ほど急ハンドルを切らなくてはなりません．ということで, この設計は, 運転者に急ハンドルを強要する走りにくい設計になってしまいます．

観察 3.3 曲率 $\kappa(s)$ が $\kappa(s) = as$（ただし a は定数）となる曲線の上を走る場合, ハンドルを一定のスピードで切れば良い.

このような曲線で作られた道路であれば, 急ハンドルを切る必要は全くありません. 一番最初の問題（x-軸と y-軸を繋ぐ道路を設計する問題）には, この曲線を利用して答えることが出来ます. x-軸をマイナスの方向から走って来て, 適当な点でこの曲線の $s = 0$ の点を上手く繋ぎ, あるところまで行ったら円に繋ぎ, 更にあるところまで行ったら先の曲線を逆向きにしたものに繋ぎ, 曲率が 0 になったところで直線に繋ぐ, という風にすれば, 急ハンドルを一切必要としない道路が完成します.

4 ジャンクションに使われる曲線

ここまでの節で, ジャンクションに使われる曲線は, 曲率が徐々に増えて徐々に減るような曲線が望ましい, ということを調べて来ました. では, 実際にそういう曲線はあるのか, あるとしたら何個あるのか, という話をこの節ではします. 結論を先に言うと, あります. しかもそのような曲線は, 回転と平行移動で移るもの（すなわち合同なもの）を同じだと思うと, 唯一つしかありません. そのことは, 次の定理から導かれます.

定理 4.1 (平面曲線の基本定理) $\kappa(s)$ を微分可能な関数とする. このとき, この $\kappa(s)$ を曲率とするような曲線が存在する. さらにそのような曲線は, 回転と平行移動でお互いに移すことが出来る.

証明. $\kappa(s)$ を微分可能な関数とします. これを曲率とする曲線を見付ける必要がありますが, それは

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos(\int_0^t \kappa(u) du) dt, \int_0^s \sin(\int_0^t \kappa(u) du) dt \right)$$

とすれば良いことが分かります（この曲線の曲率を計算すると, 確かに $\kappa(s)$ になっていることが確かめられます）. 後半部分の証明は, とても複雑なので省略します. Q.E.D.

例えば, 曲率が $\kappa(s) = 0$ を満たす曲線を考えます. このような曲線が存在することは, 平面曲線の基本定理から保証されています. 実際, 上の証明に出てきた式に $\kappa(s) = 0$ を代入して計算すると,

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos(0) dt, \int_0^s \sin(0) dt \right) = (s, 0)$$

となり, これは直線（x-軸）の媒介変数表示です. さらに, 全ての点で曲率が 0 になる曲線は, x-軸を回転と平行移動で動かしたものに限る（すなわち直線に限る）, ということ

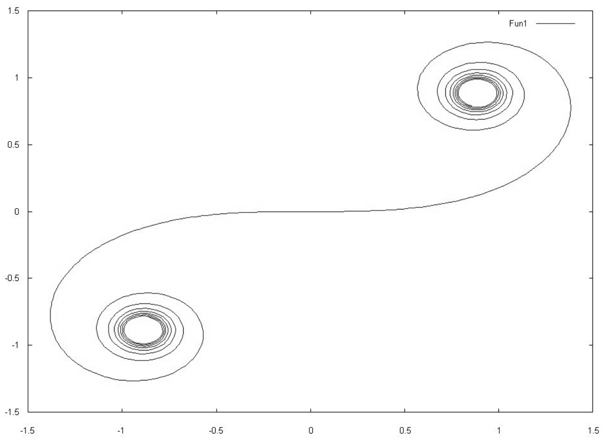
も, 平面曲線の基本定理から導かれます. さらに, $\kappa(s) = a$ （ただし a は正の定数）とすると, これを曲率として持つ曲線は半径が $1/a$ の円になることが分かります.

高速道路のジャンクションに使われる曲線は, 曲率 $\kappa(s)$ が $\kappa(s) = as$ を満たすと都合が良い, ということを観察しました. 平面曲線の定理から, そのような曲線が存在することが分かります. それは次の曲線です.

定義 4.2 a を定数とする. 次で定義される曲線を <u>**クロソイド曲線**</u> と呼ぶ:

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos(\frac{at^2}{2})dt, \int_0^s \sin(\frac{at^2}{2})dt \right)$$

この曲線の媒介変数表示であること, そして弧長パラメータ表示であることは, 定義より確かめることが出来ます. さらに, クロソイド曲線の曲率は $\kappa(s) = as$ となることも簡単な計算で分かります. ちなみに, この媒介変数表示に現れる積分は, 非常に難しいです. sin や cos などの関数（初等関数と言います）では表すことが出来ません.



クロソイド曲線の概形

余談を少々. このクロソイド曲線は, 高速道路だけでなく, 普通の道路や鉄道の線路にも利用されています. 実際, 日本で最初にクロソイド曲線を使った道路が建設されたのは, 昭和 27 年, 三国峠の道路改良工事の時だそうです. それまでの三国峠の道路は, 直線と円の組み合わせで作られており, 非常に事故の多い道路だったそうです. それは, 先に述べたように, 運転手に急ハンドルを強要する設計だからです. そこで, 直線部分と円部分の間に, クロソイド曲線を挟み, 急ハンドルを切る必要が無い道路に作り変えた, というお話. 因みに三国トンネルの群馬県側には, 「クロソイド曲線碑」などというオブジェがあるそうです・・・.

5　まとめなど

今回の話では, 平面曲線の基本的な概念（曲率など）を解説し, その理論が高速道路の設計に使われている様を紹介しました. こういう話をネタとして覚えておくのも, それは重要だし楽しいことです. しかしそれ以上に, 「どうやって数学が応用されているか」という流れが重要だと個人的には思うので, それをまとめてみたいと思います.

曲線を決めなくてはならない問題があったとします（高速道路のジャンクションの設計がこれに相当する）. この問題は, 次のような手順で解決されました.

目的を設定する（走りやすい道路, ハンドル操作が自然な道路）
→ 目的を数学的に定式化する（曲率が$\kappa(s) = as$ を満たす）
→ その数学の問題を解決する

このような手順は, 曲線に限らず, 様々な問題に応用できると私は考えます.

例えば, ジェットコースターの設計を考えます. 簡単の為に, 一回だけ宙返りするジェットコースターを考えます. そして横方向には動かないとして, また平面曲線の話にします（つまりジェットコースターを横から見た形を議論することにします）. このときの設計の目的は, スピードを出しても乗客に負担がかからないようにすること, だと思います. そして, 加速度が急激に変化すると危険であるということで, 加速度の変化が一定である曲線（すなわちクロソイド曲線）が使われています. ごく初期のジェットコースターは直線と円の組み合わせで出来ていて, ムチ打ちになる人が続出したとか・・・.

曲線だけに話を限っても, 他にもいろいろな応用が考えられます. 当日の講演では, 曲線の話が他の様々なところに応用できる, という話を取り上げたいと思います. 私の個人的な趣味の関係で, 車の話とサッカーの話が出てくる予定です.

参考文献

[1] 小林昭七;「曲線と曲面の微分幾何」, 裳華房.
[2] 梅原雅顕, 山田光太郎;「曲線と曲面」, 裳華房.
[3] 北海道大学数学科;「数学の並木道」（北大高校生講座）, 日本評論社.
[4] 吉田稔, 飯島忠（編）; 「話題源数学」, 東京法令出版.
[5] 国土交通省・高崎河川国道事務所; 「日本初のクロソイド曲線の導入（三国峠）」, http://www.ktr.mlit.go.jp/takasaki/road/r17/mikuni/kuroso.htm