

2007年度数学通論 I 中間試験問題

担当: 田丸

注意

以下, 全ての問いの解答において, まず最初に証明すべきことを明確に記述すること. この試験では, 証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています. そのことを意識して答案を書くようにして下さい.

定義

解答する時には, 以下の定義を参考にしても良い:

- A が開集合 $:\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset A$,
- A が閉集合 $:\Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow A^c$ が開集合,
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ が連続 $:\Leftrightarrow \forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a; \delta) \cap A) \subset U(f(a); \varepsilon)$,
- A がコンパクト $:\Leftrightarrow \forall \mathcal{U} : A$ の開被覆, $\exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

問題

- [1] $(0, +\infty)$ が開集合であることを, 定義に従って示せ.
- [2] \mathcal{O} を \mathbb{R} の開集合全体の成す集合族とする. 次の命題に対して, 正しいければ証明し, 間違っていれば反例を挙げよ. ただし, 反例に関する証明は省略しても良い.
- (1) $\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$,
 - (2) $\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.
- [3] 自然数全体の集合 \mathbb{N} がコンパクトでないことを, 定義に従って示せ.
- [4] 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ が連続でないことを示せ.
- [5] 集合 $A, B, C \subset \mathbb{R}$ を考える. 写像 $f : A \rightarrow B$ と $g : B \rightarrow C$ が共に連続ならば, 合成写像 $g \circ f$ も連続であることを示せ. ここで, 次を用いても良い:
- (*) $X, Y \subset \mathbb{R}$ および写像 $F : X \rightarrow Y$ に対して,
 F が連続 $\Leftrightarrow \forall U : \text{開集合}, \exists O : \text{開集合 s.t. } F^{-1}(U) = O \cap X$.

追加

- [6] ヤマを張って外れた問題があったら, その問題と解答を書け. (10点程度補填)
- [7] 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい.