2007年度数学通論 I・同演習 期末試験問題

担当: 田丸・倉・高橋

注意

証明問題の解答においては, **まず最初に証明すべきことを明確に記述すること**. この試験では, 証明を正確に正しい順序で書くことができることを要請しています. そのことを意識して答案を書くようにして下さい.

定義

(X, d) を距離空間とする. 解答する時には, 以下の定義を参考にしても良い:

- $X \supset A$ の内部: $A^\circ := \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A\}$.
- $X \supset A$ の閉包: $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$.
- $X \supset A$ が開集合 $:\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset A$,
- $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ が連続 $:\Leftrightarrow \forall a \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon)$.
- (X, d) がコンパクト $:\Leftrightarrow \forall \mathfrak{U} :$ X の開被覆, $\exists U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathfrak{U} : X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$.
- $A \subset X$ に対して, A が X のコンパクト部分集合
  $:\Leftrightarrow \forall \mathfrak{U} :$ A の（(X, d) における）開被覆, $\exists U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \in \mathfrak{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$.

問題

[1] $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, 1), x_2 \in [0, 1]\}$ を考える. $\mathbb{R}^2$ に以下の距離を入れたとき, D の内部と閉包を答えよ. ただし, 証明を書く必要はない.
(a) 標準的な距離 d_{st}.
(b) $d_{\max}(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. ただし $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.
(c) 離散距離 d_∞ （すなわち, $d_\infty(x, y) = 0$ (if $x = y$), $d_\infty(x, y) = 1$ (if $x \neq y$)）.

[2] 距離空間 (X, d) の ε-近傍が開集合であることを, 定義に従って示せ.

[3] 距離空間 (X, d) および $x_0 \in X$ を考える. 関数 $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x_0, x)$ が連続であることを, 定義に従って示せ. ただし, $\mathbb{R}$ では標準的な距離を考える.

[4] (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. このとき, 「開集合の逆像が開集合である」ことを（必要があれば正確に述べた上で）定義に従って示せ.

[5] (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. (X, d_X) がコンパクトであるとき, 像 $f(X)$ は (Y, d_Y) のコンパクト部分集合であることを示せ.

追加

[6] ヤマを張って外れた問題があったら, その問題（ただし 1 問限り）と解答を書け.

[7] 講義に関する意見・感想・コメント・要望がありましたら答案に書いて下さい.