平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題
『学部３年次生を対象とする特別選抜』

数　　学 専 攻	専門科目		受験番号	M

次の［1］、［2］、［3］の全問に解答せよ。

[1]　２次複素正方行列および２次元複素列ベクトルに関する以下の問いに答えよ。

(1) ２次正方行列 L の固有値が２つとも 0 ならば、$L^2 = O$ (零行列) であることを示せ。

(2) ２次正方行列 M の固有値が重解 $\alpha \neq 0$ のみであり、$\mathrm{Ker}(M - \alpha E_2)$ の次元は１次元であるとする。このとき、$\mathbf{v}$ を M の１つの固有列ベクトルとすると、$\mathbf{v}$ と１次独立な列ベクトル $\mathbf{w}$ で

$$M\mathbf{w} = \mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$$

をみたすものが存在することを示せ。ただし、$\mathrm{Ker}(M - \alpha E_2)$ は線形写像 $(M - \alpha E_2)$ の核、 E_2 は２次単位行列である。

(3) (2) の M に対し、正則行列 T で

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

をみたすものを１つ求めよ。

[2]　閉区間 [0,1] で連続な関数全体のなす集合を F とする。$f, g \in F$ に対し、実数値 $d(f,g)$ を次の様に定義する。

$$d(f,g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

(1) $(F,\ d)$ は距離空間であることを示せ。

(2) $\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$ を $(F,\ d)$ の点列とする。点列 $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が F の点 f に収束するための必要十分条件は、任意の ϵ に対してある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば全ての $t \in [0,1]$ に対して $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ が成り立つこと、であることを示せ。

(3) $(F,\ d)$ から $\mathbf{R}$ への写像 ϕ を

$$\phi : f \to \int_0^1 f(t)dt$$

で与えるとき、ϕ は連続写像であることを示せ。

(4) $(F,\ d)$ は完備距離空間であることを示せ。

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題
『学部３年次生を対象とする特別選抜』

数　学 専 攻	専門科目		受験番号	M

[**3**]　自然数 n の階乗を $n!$ とかく。また、$0! = 1$ とする。

(1) 整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

の収束半径は 1 であることを示せ。

(2) 開区間 (-1,1) 上で、(1) の整級数が定める関数を $f(x)$ とする。$f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ。

$$(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0.$$

(3) (2) を用いて、開区間 (-1,1) 上で $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ。

(4) 関数 $f(x)$ の広義積分 $\int_{-1}^{1} f(x) dx$ を求めよ。

(5) 次の級数は収束することを示し、更にその和を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)}$$