平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午前)		受験番号	M

共通問題：　次の［1］、［2］、［3］の全問に解答せよ。

[1] 変数 x に関する n 次以下の実多項式のなすベクトル空間を V_n とする．実数 a,b に対して，写像 $F_{a,b}:V_n\to V_n$ を

$$\Big(F_{a,b}(f)\Big)(x)=f(ax+b)\qquad (f\in V_n)$$

で定める．さらに，$f,g\in V_n$ に対して，

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

と定義する．

(1) ベクトル空間 V_n の次元を求めよ．

(2) 写像 $F_{a,b}$ は V_n の線形変換であることを示せ．

(3) 上に定義された (,) は V_n 上の内積であることを示せ．

(4) $n=1$ のとき，V_n の正規直交基底を一組求めよ．

(5) $n=1$ のとき，(4) で求めた基底に関する変換 $F_{a,b}$ の表現行列を求めよ．

(6) $n=1$ のとき，$F_{a,b}$ が直交変換となるような a と b の組をすべて求めよ．

[2] 任意の自然数 n に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{2^k}$$

で定める．

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ は収束することを示せ．

(3) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}$ は項別微分可能であり，関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ は C^1 級であることを示せ．

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)		受験番号	M

[**3**] 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において，原点 O を中心とする半径 1 の円周を C とし，原点 O を通る直線全体のなす集合を M とする．M の異なる元 l, m に対し，$C \cap l, C \cap m$ 上の点 x，y をそれぞれとり，３点 O, x, y を頂点とする三角形の面積を $d(l,m)$ とする．また，$l = m$ のときは，$d(l,m) = 0$ とする．

(1) $d(l,m)$ $(l \neq m)$ は，点 x, y の取り方によらないことを示せ．

(2) $d(\ ,\ )$ は M 上の距離関数であることを示せ．

(3) C から M への写像 f を，C の点 x に対して原点 O と点 x を通る直線を対応させるものとする．C を $\mathbb{R}^2$ の部分距離空間と見たとき，写像 f は連続であることを示せ．

(4) M から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 g が，M の各元 l に対して $g(l) \in l$ をみたしているものとする．このとき，$g(m) = O$ となるような元 $m \in M$ が存在することを示せ．

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午後)		受験番号	M

選択問題：次の［4］～［9］の６問中の２問を選んで解答せよ。

［4］ 次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ。

［A］ p を 3 以上の素数とする。$i \in \mathbf{Z}$ に対し、$\langle i \rangle = i \bmod p \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ と書く。体 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の部分集合 S と T を以下のように定義する。

$$S = \{\langle i \rangle^2 \mid i \in \mathbf{Z}\}, \quad T = \{\langle 0 \rangle^2, \langle 1 \rangle^2, \langle 2 \rangle^2, ..., \langle \frac{p-1}{2} \rangle^2\}.$$

(1) $i < j$ $(0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2})$ に対し、$\langle i \rangle^2 - \langle j \rangle^2 \neq \langle 0 \rangle$ であることを示せ。

(2) 任意の $k \in \mathbf{Z}$ について、$\langle k \rangle^2 = \langle p-k \rangle^2$ を示せ。

(3) $S = T$ を示せ。

(4) $a \in \mathbf{Z}$ に対し、$\langle a \rangle - S = \{\langle a \rangle - \langle i \rangle^2 \mid \langle i \rangle^2 \in S\}$ とおく。このとき、$(\langle a \rangle - S) \cap S \neq \phi$ を示せ。

(5) 任意の $a \in \mathbf{Z}$ に対し、$\langle a \rangle = \langle b \rangle^2 + \langle c \rangle^2$ となる $b, c \in \mathbf{Z}$ が存在することを示せ。

［B］ Λ を複素数体 $\mathbf{C}$ 内で 1 と i (虚数単位) で生成される $\mathbf{Z}$-加群

$$\Lambda = \{m + ni \in \mathbf{C} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$$

とする。$\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ $(z \mapsto iz)$ を i 倍写像とし、$\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Lambda$ $(z \mapsto z + \Lambda)$ を標準的準同型とする。

(1) $\varphi(\Lambda) = \Lambda$ となることを示せ。

(2) $\mathbf{C}/\Lambda$ の $\mathbf{Z}$-加群としての自己同型 $\overline{\varphi} : \mathbf{C}/\Lambda \to \mathbf{C}/\Lambda$ で、$\pi \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) $O = \pi(0)$ とおく。正の整数 n に対して、

$$E[n] = \{P \in \mathbf{C}/\Lambda \mid nP = \overbrace{P + P + \cdots + P}^{n\text{回}} = O\}$$

とするとき、$E[n]$ はアーベル群になることを示せ。また、その位数を求めよ。

(4) 環 $\mathbf{Z}[i]$ のイデアルとして、

$$(4 + 2i, 1 - 3i) = (1 - i)$$

となることを示せ。

(5) $m + ni \in \mathbf{Z}[i]$ $(m, n \in \mathbf{Z})$ と $P \in \mathbf{C}/\Lambda$ に対し、$(m + ni)P = mP + n\overline{\varphi}(P)$ と定める。このとき、

$$\begin{cases} (4 + 2i)P = O \\ (1 - 3i)P = O \end{cases}$$

をみたす $P \in \mathbf{C}/\Lambda$ をすべて求めよ。

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[５]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ。

[A]　2次元球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ から4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への写像 $f:S^2\to\mathbb{R}^4$ を $f(x,y,z)=(x^2-y^2,yz,zx,xy)$ で定義するとき、次に答えよ。

(1) 点 $p=(0,0,1)\in S^2$ のまわりの S^2 の座標近傍として (U,φ) を考える。ただし、$U=\{(x,y,z)\in S^2 : z>0\}$ であり、$\varphi:U\to\mathbb{R}^2$ は $\varphi(x,y,z)=(x,y)$ で定義される写像である。この (U,φ) が定める局所座標に関して、点 p における f のヤコビ行列を求めよ。

(2) f ははめ込みである、すなわち S^2 の各点における f のヤコビ行列の階数は２である、ことを示せ。また、f は埋め込みであるか？理由とともに述べよ。

(3) $\pi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を $\pi(s,t,u,v)=(s,t,u)$ で定義される射影とする。このとき、合成写像 $g=\pi\circ f:S^2\to\mathbb{R}^3$ ははめ込みであるか？理由とともに述べよ。

[B]　次に答えよ。

(1) 正方形の頂点を順に a_0,a_1,a_2,a_3 とするとき、複体

$$K=\{|a_0|,|a_1|,|a_2|,|a_3|,|a_0a_1|,|a_1a_2|,|a_2a_3|,|a_3a_0|\}$$

のホモロジー群を求めよ。

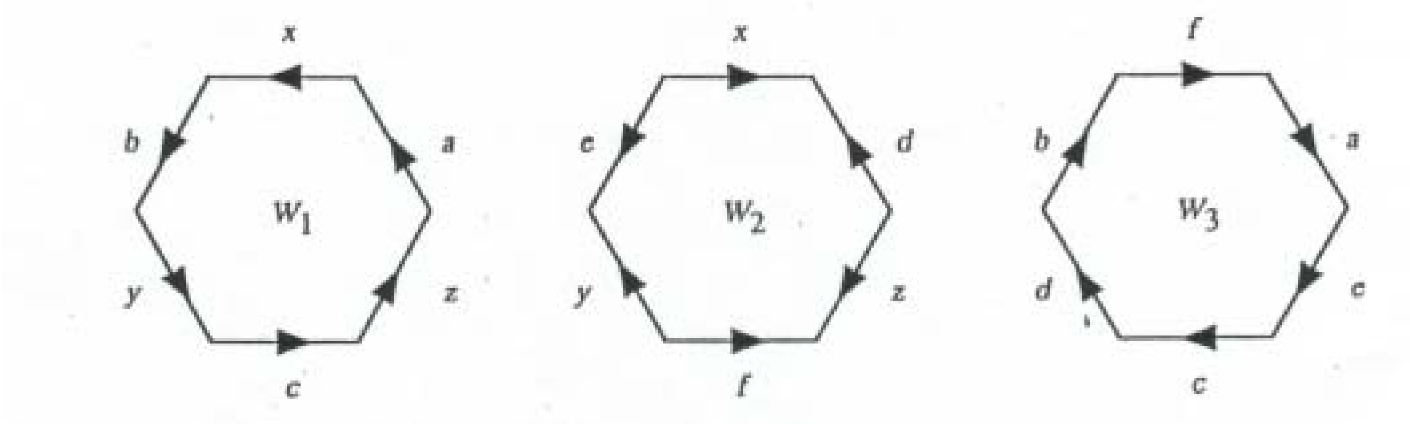
(2) 正方形の枠を n 個すきまなく横一列に並べてできる平面内の図形

$$X_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le n,\ y\in\{0,1\}\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ x\in\{0,1,2,\ldots,n\}\}$$

の１次元ベッチ数を求めよ。

(3) 内部も込めた２つの正６角形 W_1 と W_2 の辺 x,y,z を下図のように向きを込めて同一視してできる位相空間 Y について、X_n が Y とホモトピー同値になるときの n の値を求めよ。

(4) 内部も込めた正６角形 W_3 と Y の辺 a,b,c,d,e,f を下図のように向きを込めて同一視してできる位相空間 F について、１次元と２次元のホモロジー群を求めよ。



平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[6]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ。

[A]　$f(x)$ を区間 $[0,1]$ 上の有界可測関数とし、μ は $[0,1]$ 上のルベーグ測度を表わすとき、次を示せ。

(1) $M \geq 0$ に対して、$\mu(\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}) = 0$ ならば、任意の $p > 0$ に対して

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^p d\mu(x) \leq M^p.$$

(2) $M \geq 0$ と $p > 0$ に対して、

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^p d\mu(x) \geq M^p \mu(\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}).$$

(3) $M \geq 0$ と $p > 0$ に対して、$\mu(\{x \in [0,\ 1] : |f(x)| > M\}) > 0$ ならば、

$$\liminf_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \geq M.$$

(4) $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$ が存在して、$\inf\{M : \mu(\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}) = 0\}$ に等しい。

[B]　$\mathcal{K}$ を $\mathbb{R}$ に含まれる開区間の全体、$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合の全体とし、$\mathbb{R}$ 上の関数

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

を考える。集合関数 $\lambda : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を、$\lambda(\emptyset) = 0$ かつ $-\infty < a < b < +\infty$ に対して

$$\lambda((a,b)) = Y(b) - Y(a)$$

によって定め、任意の $A \in \mathcal{P}$ に対して

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) : E_n \in \mathcal{K},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset A \right\}$$

と定義する。次を示せ。

(1) $E \in \mathcal{K}$ のとき、$\mu^*(E) = \begin{cases} 1 & 0 \in E \\ 0 & 0 \notin E. \end{cases}$

(2) $A \in \mathcal{P}$ が 0 を含むとき、$\mu^*(A) = 1.$

(3) $A \in \mathcal{P}$ が 0 を含まないとき、$\mu^*(A) = 0.$

(4) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{P}$ が互いに素であるとき、

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［７］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ。

[A]　$f(z)$ は $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ で正則な関数で、$\displaystyle\iint_D |f(z)|\,dx\,dy<\infty$ （ただし $z=x+iy$ ）をみたすとする。このとき、$|\zeta|<1$ として、次に答えよ。

(1) C_r を円周 $\{|z|=r\}$ $(0<r<1)$ に反時計回りの向きをつけたものとするとき、

$$\int_{C_r}\frac{z\,f(z)}{(z-r^2\zeta)^2}dz=i\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{(1-re^{-i\theta}\zeta)^2}d\theta$$

を示せ。

(2) $g(z)=z\,f(z)$ とおくとき、

$$\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{f(z)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\,dx\,dy=2\int_0^1 g'(r^2\zeta)\,r\,dr$$

を示せ。

(3) $f(\zeta)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D\frac{f(z)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\,dx\,dy$ を示せ。

[B]　$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ とおく。ただし、$a>0$ とする。次に答えよ。

(1) 上半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ に含まれる $f(z)$ の極とその留数を求めよ。

(2) γ_R を半円周 $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=R$ かつ $\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ （$R>0$）とするとき、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=0$$

を示せ。

(3) 上を用いて広義積分

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$$

を求めよ。

［８］　次の [A], [B], [C] のうち１つを選び解答せよ。

[A]　$f(t)$ を区間 $[0,1]$ 上の連続関数とするとき、次に答えよ。

(1) 境界値問題

$$(*)\ \begin{cases} x''(t)+\pi^2x(t)=f(t), \quad 0<t<1,\\ x(0)=0,\ x(1)=0\end{cases}$$

の解 $x(t)$ が存在するならば、$\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin\pi t\,dt=0$ であることを示せ。

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)	受験番号	M

(2) $[0,1]$ 上の関数 $y(t)$ を

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t f(s)\sin\pi(t-s)\,ds$$

で定める。$y'(t),\ y''(t)$ を求め、$y(t)$ のみたす常微分方程式を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin\pi t\,dt = 0$ ならば、$(*)$ の解が存在することを示せ。

[B] 関数 $x(t),\ y(t)\ (0 \le t < \infty)$ を連立常微分方程式

$$\begin{cases} x' &= -xy \\ y' &= xy - y \end{cases}$$

の解とする。次に答えよ。

(1) $x(t) > 0,\ y(t) > 0\ (0 \le t < \infty)$ のとき、次を示せ。

(a) $x(t)$ は t に関して単調減少関数で、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ が存在する。

(b) $x(t) + y(t)$ は t に関して単調減少関数で、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(x(t)+y(t))$ が存在する。

(c) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ である。

(2) $x(0) > 0,\ y(0) > 0$ のとき、$x(t) > 0,\ y(t) > 0\ (0 \le t < \infty)$ であることを示せ。

[C] 区間 $[0,1]$ 上の常微分方程式の境界値問題

$$(*)\ \begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

を考える。ここで、$a(x), f(x)$ は $[0,1]$ 上で与えられた連続関数で、$a(x) \ge 0$ とする。自然数 n に対し $h = 1/n$ とおき、$(*)$ の差分近似問題

$$(**)\ \begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + a_i u_i = f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

を考える。ここで、$a_i = a(ih),\ f_i = f(ih)$ である。次に答えよ。

(1) $f(x) \equiv 0$ のとき、$u_i\ (i = 0, \cdots, n)$ が $(**)$ の第一式をみたすならば

$$(***)\qquad |u_i| \le \frac{1}{2}(|u_{i+1}| + |u_{i-1}|) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

が成り立つことを示せ。

(2) u_i が $(***)$ をみたすとき、ある $j(1 \le j \le n-1)$ に対して $|u_j| = \displaystyle\max_{0\le i\le n}|u_i|$ ならば、$|u_{j+1}| = |u_j| = |u_{j-1}|$ であることを示せ。

(3) $f(x) \equiv 0$ のとき、$(**)$ をみたす解は $u_i = 0\ (i = 0, 1, \cdots, n)$ に限ることを示せ。

(4) $(**)$ を $u_i\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ に対する連立１次方程式とみるとき、解 u_i が存在し、ただ１つであることを示せ。

平成１２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)		受験番号	M

［9］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ。

[A]　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布で、その共通の分布は平均 $\lambda > 0$ のポアソン分布 $\Pr\{X_n = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ であるとする。$S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$ とおくとき、次に答えよ。

(1) $E\Big[\exp(\alpha X_1 + \beta X_2)\Big]$ を求めよ。

(2) $E\Big[\exp(\alpha S_n)\Big]$ を求めよ。

(3) $\alpha < 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \exp(\alpha S_n) = 0$ a.e. を示せ。

(4) $\alpha < 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E\Big[\exp(\alpha S_n)\Big] = E\Big[\lim_{n\to\infty} \exp(\alpha S_n)\Big]$ は成立するか？

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E\Big[\exp\big(\frac{1}{n}S_n\big)\Big] = E\Big[\lim_{n\to\infty} \exp\big(\frac{1}{n}S_n\big)\Big]$ は成立するか？

[B]　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布で、その共通の分布は $[0, 1]$ 上の一様分布であるとする。$U_n,\ V_n$ を

$$U_n = \min\{X_k;\ k = 1, 2, \dots, n\}, \quad V_n = \max\{X_k;\ k = 1, 2, \dots, n\}$$

とし、$0 \le u,\, v \le 1$ とするとき、次に答えよ。

(1) $\Pr\{U_3 \le u,\, V_3 \le v\}$ を求めよ。

(2) $\Pr\{U_n \le u,\, V_n \le v\}$ を求めよ。

(3) $\Pr\{U_n \le u\}$ を求めよ。

(4) $a > 0,\, b > 0$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{U_n \le \frac{a}{n}, 1 - V_n \le \frac{b}{n}\} = \lim_{n\to\infty} \Pr\{U_n \le \frac{a}{n}\} \lim_{n\to\infty} \Pr\{1 - V_n \le \frac{b}{n}\}$$

を示せ。