平成１３年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

次の［1］,［2］,［3］の全問に解答せよ．

[1] V を n 次元実ベクトル空間，$f : V \to V$ を $f^2 = f$ を満たす線形写像とするとき次を示せ．ただし合成写像 $f \circ f$ を f^2 で表す．

(1) id_V を V 上の恒等写像とし，$g = \mathrm{id}_V - f$ とおく．このとき

$$g^2 = g, \qquad f \circ g = g \circ f = O,$$

ただし O は零写像とする．

(2) $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}f$.

(3) $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.

(4) V の任意のベクトルは $\mathrm{Ker}f$ のベクトルと $\mathrm{Im}f$ のベクトルの和として一意に表わせる．

(5) $f \neq O$ のとき f に対応する行列として

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

がとれる．ここで I_r は r 次 $(1 \leqq r \leqq n)$ の単位行列とする．

[2] $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数列 $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ を

$$f_0(x) = g(x), \qquad f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n g(y)dy, \quad n \geqq 0,$$

と定義する (ただし $0! = 1$ とする．).

(1) 特別な場合として $g(x)$ が恒等的に 1 になるとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ の値を求めよ．

以下の設問では $g(x)$ は，定数関数とはかぎらない $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする．

(2) $n \geqq 0$ のとき，$\displaystyle f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(y)dy$ を示せ．

(3) $f_n(x)$ は n 回連続微分可能であることを示せ．

(4) $\displaystyle F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は, 任意の閉区間 $[a, b]$ の上で一様収束することを示せ．

(5) $F(x)$ が連続微分可能であるための必要十分条件は $g(x)$ が連続微分可能であることを示せ．

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

[**3**] $\mathbb{R}^2$ のノルム $\| (x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2}$ について，$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d(p,q) = \begin{cases} \| p-q \| + 1 & (\| p \| \neq \| q \| \text{ のとき}) \\ \| p-q \| & (\| p \| = \| q \| \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める．

(1) $p_0 = (1,0)$ とする．正の実数 ε について

$$U_\varepsilon(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 \,;\, d(p_0,p) < \varepsilon\}$$

で定義される集合 $U_\varepsilon(p_0)$ を $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ と $\varepsilon = 2$ となる場合にそれぞれ図示せよ．

(2) 三角不等式

$$d(p,q) \leqq d(p,r) + d(r,q) \qquad (p,q,r \in \mathbb{R}^2)$$

を示し d が $\mathbb{R}^2$ の距離になることを示せ．

(3) 単位円板 $B = \{p \in \mathbb{R}^2 \,;\, \| p \| \leqq 1\}$ が距離 d に関して開集合になることを示せ．

(4) 距離 d に関して，点列 q_n $(n = 1,2,3,\cdots)$ が点 q に収束しているとき，ある自然数 N が存在して，N より大きい自然数 n について，$\| q_n \| = \| q \|$ が成り立つことを示せ．

(5) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ 上の有界な点列で，収束する部分列をもたない例をあげよ．