平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

共通問題：　次の［1］,［2］,［3］の全問に解答せよ.

[1] $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\z\\-aby+(a+b)z\end{pmatrix}$$

によって定義される $\mathbb{R}^3$ 上の線形写像とする.（ただし a,b は正の実数とする.）

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

に関する線形写像 f の表現行列 A を求めよ.

(2) f の固有値を求めよ.

(3) f が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ.

(4) f が前問における対角化可能の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^3$ を固有空間に分解するような $\mathbb{R}^3$ の基底を一組求めよ.

[2] $f(x)$ を 閉区間 $[-1,1]$ 上で連続な正値関数とする.

(1) 曲線 $y=f(x)$ $(-1\le x\le 1)$ 上の 2 点 P,Q と原点 $O=(0,0)$ との 3 点を頂点とする三角形 $\triangle OPQ$ の面積を最大にするような P,Q が存在することを示せ.

(2) さらに $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続微分可能であるとする．この面積最大の三角形 $\triangle OPQ$ において，もしも P が曲線の端点 $(1,f(1))$ とも $(-1,f(-1))$ にも一致しないならば，P における曲線の接線は直線 OQ に平行であることを示せ.

(3) $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ のとき，面積を最大にする三角形 $\triangle OPQ$ を具体的に求めて図示せよ.

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

[**3**] 実数 x について, x 以上の整数で最小のものを $\langle x \rangle$ で表すことにする.

(1) 実数 x, y について $x \leq y$ ならば $\langle x \rangle \leq \langle y \rangle$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 x, y について

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y + x - \langle x \rangle \rangle$$

を示せ.

(3) 実数 x, y について

$$d(x, y) = \langle |x - y| \rangle$$

により与えられる d が実数の集合 $\mathbb{R}$ 上の距離になることを示せ.

(4) すべての $\mathbb{R}$ の部分集合は, この距離 d に関して開集合になることを示せ.

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)		受験番号	M

選択問題：次の ［4］～［8］ の５問中の２問を選んで解答せよ.

［4］ 次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

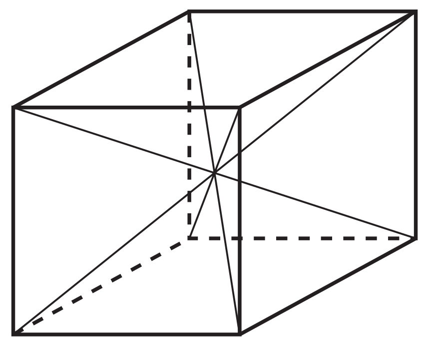

図 1: 立方体 X と，４本の対角線

[A] $X \subset \mathbb{R}^3$ は

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\right\}$$

で表される立方体とする．原点 O を通る直線を軸とした回転で X を X 自身に重ね合わせるもの全体がなす集合を G とする.

(1) 3 次の正方行列 A が，原点 O を通るある直線を軸とした回転を表すための必要十分条件は， A が行列式 1 の直交行列（つまり $\det A = 1, {}^tA = A^{-1}$）であることを示せ．必要ならば，以下の設問でこの結果を用いて構わない.

(2) G は回転の合成（つまり回転を順に行うこと）を演算として，位数 24 の群をなすことを示せ.

(3) G の 3 シロー群 P が任意に与えられたとき，立方体 X の対角線 L が存在して， P は L を軸とした回転全体がなす G の部分群として表されることを示せ.

(4) S は立方体 X の 4 本の対角線がなす集合とする．G は自然に S に作用していることを示せ．この作用により G と４次対称群との同型が導かれることを示せ.

[B] 次に答えよ.

(1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，多項式 : $X^3 - 2n$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上可約であるためには， n が

$$(*) \qquad n = 4m^3 \qquad ({}^\exists m \in \mathbb{N})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

(2) 前問 (1) の条件 $(*)$ をみたさない自然数 n に対し，$K_n = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2n}, \omega)$ とする．ただし， ω は 1 の原始３乗根である．このとき，

(a) 拡大次数 $[K_n : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(b) ガロア群 $Gal\,(K_n/\mathbb{Q})$ を記述せよ.

(3) 前問 (2) で示されている体 K_n と $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ が $\mathbb{Q}$ 上同型であるためには， n が

$$n = m^3 \quad \text{または} \quad n = 2m^3 \quad ({}^\exists m \in \mathbb{N})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［5］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A] 次の条件 (a), (b), (c) を考える．

(a) M と N は C^∞ 級多様体である．

(b) $f : M \to N$ と $g : N \to M$ は共に C^∞ 級写像である．

(c) 合成写像 $g \circ f : M \to M$ は M の恒等写像に等しい．

次に答えよ．

(1) 条件 (a), (b), (c) のもとで M の各点での f の微分が単射であること，すなわち f が**はめ込み**であることを示せ．

(2) 条件 (a), (b), (c) のもとで，さらに f は単射であり，かつその像の上への同相写像であることを示せ．

(3) M を１次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$，$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - xy = 0\}$ を３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合とし，$f : M \to N$ を $f(t) = (1, t, t)$，$g : N \to M$ を $g(x, y, z) = z$ で定義する．これらは条件 (a), (b), (c) をすべてみたしていることを示せ．

(4) C^∞ 級多様体間の C^∞ 級写像で，各点での微分が全射となるものを**沈め込み**という．条件 (a), (b), (c) をすべてみたしていても，g は必ずしも沈め込みとは限らないことを，(3) の例を用いて示せ．

[B] ３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

と，z 軸上の線分

$$J = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le z \le 1\}$$

の和集合を $X = S^2 \cup J$ とする．また，２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の単位円板を

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

とおく．このとき位相空間 X と D^2 について，次に答えよ．

(1) X と D^2 のオイラー数を求めよ．

(2) X と D^2 が同相でないことを示せ．

(3) X と D^2 がホモトピー同値か否かを述べ，その理由も記せ．

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午後)		受験番号	M

[6]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　次に答えよ．

(1) 非負整数 $m \geq 0$ と整数 n について，周回積分

$$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(z+z^{-1})^m}{z^{n+1}}dz$$

を考える．このとき

$$I_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!(n+k)!} & (m = n+2k,\ 0 \leq k \leq m \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を示せ．

(2) 複素関数 $f(z) = \exp(z+z^{-1})$ の $z=0$ における留数は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}$$

で与えられることを示せ．

(3) 問 (2) の関数 $f(z)$ の $z=0$ におけるローラン展開の係数を a_n とするとき，$a_n = a_{-n}$ を示せ．また a_n を求めよ．

[B]　区間 $I = [0,\ 1]$ 上のルベーグ可積分関数 $\varphi(\theta)$ に対して

$$f(x) = \int_0^1 \sin(x\varphi(\theta))d\theta \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

とおく．

(1) $f(x)$ が連続関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ が連続微分可能であることを示せ．
（ヒント：$|\sin(x+h) - \sin x| \leq |h|$ ）

(3) ルベーグ可測関数列 $\varphi_n(\theta)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は $|\varphi_n(\theta)| \leq |\varphi(\theta)|$ をみたし，$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta) = \varphi(\theta)$ $(\theta \in I)$ ならば

$$f_n(x) = \int_0^1 \sin(x\varphi_n(\theta))d\theta$$

は $n \to \infty$ のとき $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束することを示せ．

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[７]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　$(x(t), y(t))$ $(0 \le t < \infty)$ を次の微分方程式の解とする．

$$\begin{cases} x' = (1 - x^2 - y^2)x - 2y, \\ y' = 2x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

(1) $z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2) 次を示せ．

(a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $T > 0$ が存在して $t > T$ ならば $z(t) < 1 + \varepsilon$ となる．

(b) $z(0) \ne 0$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し， ある $T > 0$ が存在して $t > T$ ならば $z(t) > 1 - \varepsilon$ となる．

(3) $(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$ （ただし $r(t) \ge 0$) と極座標表示するとき，$\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ を求めよ．

(4) 初期値 $(x(0), y(0))$ が次の (a), (b) で与えられるとき，軌道 $(x(t), y(t))$ $(0 \le t < \infty)$ を図示せよ．

(a) $(x(0), y(0)) = (2, 0)$　　(b) $(x(0), y(0)) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

[B]　$p(t)$ は区間 $[a, b]$ 上の連続関数で $p(t) > 0$ $(a \le t \le b)$ をみたすとする．実数 λ に対し，常微分方程式の境界値問題

$$(\mathrm{P})_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) + \lambda p(t) x(t) = 0, \quad a < t < b, \\ x(a) = 0,\ x(b) = 0 \end{cases}$$

を考える．次に答えよ．

(1) $\lambda \ne \mu$ に対して，$(\mathrm{P})_\lambda, (\mathrm{P})_\mu$ の解をそれぞれ $x(t), y(t)$ としたとき次を示せ．

$$\int_a^b x(t) y(t) p(t)\, dt = 0.$$

(2) $\lambda \le 0$ のとき，$(\mathrm{P})_\lambda$ の解 $x(t)$ は $x(t) \equiv 0$ (すなわち恒等的に零) となることを示せ．

(3) $x(t)$ を $(\mathrm{P})_\lambda$ の解で $x(t) \not\equiv 0$ とする．$x'(a) \ne 0$ を示せ．

(4) $x_1(t), x_2(t)$ を $(\mathrm{P})_\lambda$ の解で $x_1(t) \not\equiv 0,\ x_2(t) \not\equiv 0$ とする．$x_1(t) = c x_2(t)$ $(a \le t \le b)$ なる実数 $c \ne 0$ が存在することを示せ．

平成１３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［8］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の離散型確率変数とする．一般に，確率変数 X に対してある可算集合 $A \subset \mathbb{R}$ が存在して

$$\sum_{x \in A} P(X = x) = 1$$

をみたすとき，X は**離散型**であるという．次に答えよ．

(1) $x \notin A$ なら $P(X = x) = 0$ であることを示して，次で定義される集合 $S(X)$ について関係 $S(X) \subset A$ を導け．

$$S(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\}$$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し確率変数 $f(X, Y)$ も離散型であることを示せ．

(3) 一般に離散型の確率変数 Z が

$$\sum_{z \in S(Z)} |z|\, P(Z = z) < +\infty$$

を満たすとき Z は**平均をもつ**という．そのとき Z の平均を $E[Z] = \sum_{z \in S(Z)} z\, P(Z = z)$ で定義する．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を有界とする．確率変数 $f(X, Y)$ は平均をもち，かつ

$$E[f(X, Y)] = \sum_{x \in S(X), y \in S(Y)} f(x, y) P(X = x, Y = y)$$

が成り立つことを示せ．

(4) 任意の有界関数 $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

が成り立つならば X と Y は独立であることを示せ．

[B]　確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立で同一の分布に従い，平均 μ，分散 1 をもつとする． 未知パラメータ $\mu\ (-\infty < \mu < \infty)$ の推定量として，$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$ (c_1, c_2, c_3 は実数) を考える．このとき，次に答えよ．

(1) Y の平均 $E[Y]$，分散 $V[Y]$ を求めよ．

(2) Y が μ の不偏推定量，すなわち，任意の μ に対して $E[Y] = \mu$ となるための条件を求めよ． μ の不偏推定量となる Y のうち，分散が最小となるものは $\hat{Y} = \dfrac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ であることを示せ．

(3) 各 $X_i\ (i = 1, 2, 3)$ は，いずれも確率密度関数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$ をもつ正規分布に従うものとし，

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3,\quad Y_2 = 2X_1 - X_2 - X_3,\quad Y_3 = X_2 - X_3$$

とする．このとき

$$\sum_{i=1}^{3} (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{3}(Y_1 - 3\mu)^2 + \frac{1}{6}{Y_2}^2 + \frac{1}{2}{Y_3}^2$$

となり，Y_1, Y_2, Y_3 は互いに独立で，かつ，Y_1 は平均 3μ , 分散 3 の正規分布に従うことを示せ．