平成１４年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

次の［1］,［2］,［3］の全問に解答せよ．

[1] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を $\mathbb{R}^n$ の零でないベクトルとし，写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$$

で定める．ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ の $\mathbb{R}^n$ での標準内積とする．

(1) f は線形写像であることを示せ．

(2) $f \circ f = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})f$ を示せ．ただし，$f \circ f$ は写像 f を 2 つ合成したものである．

(3) f の固有値は 0 と $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ であることを示せ．

(4) 固有値 0 に対応する固有ベクトル空間 V を求めよ．

(5) 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に関する f の表現行列を A とする．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき，A のジョルダン標準形を求めよ．

[2] $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \int_0^n e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy$$

で定める．

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上で収束することを示せ．

(2) 関数列 $\left\{\dfrac{df_n}{dx}(x)\right\}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

(3) 関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は微分可能である．理由を述べよ．

(4) $\dfrac{df}{dx}(x) = -2xf(x)$ を示せ．

(5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2} \cos(\sqrt{2}y)\, dy$ の値を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は用いてよい．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

[**3**] 位相空間 X がコンパクトであるとは，X の任意の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X を覆うとき（すなわち $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ となるとき），$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がいつでも有限部分被覆を持つこと（すなわち $\{U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},\ldots,U_{\lambda_r}\}\subset\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して $X=\bigcup_{i=1}^{r}U_{\lambda_i}$ と出来ること）である．

(1) 閉区間 $X=[0,1]$ を実数 $\mathbb{R}$ の部分空間とする．ただし，$\mathbb{R}$ は通常の位相（ユークリッド位相）で位相空間とみなすこととする．X の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X を覆うとする．X の部分集合 Y を次で定める．

$y\in Y$ とは，$\{U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},\ldots,U_{\lambda_s}\}\subset\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が取れて，$[0,y]\subset\bigcup_{i=1}^{s}U_{\lambda_i}$ と出来ることである．

(a) $0\in Y$ を示せ．

(b) $y\in Y$ ならば，$[0,y]\subset Y$ であることを示せ．

(c) $y\in X$ とし，任意の $\varepsilon>0$（ただし $y\geq\varepsilon$）に対し $y-\varepsilon\in Y$ ならば，$y\in Y$ であることを示せ．

(d) $y\in Y,\ y\neq1$ ならば，ある $\varepsilon>0$ に対して $y+\varepsilon\in Y$ を示せ．

(e) y_0 を Y の上限とするとき，$y_0=1$ を示せ．また，定義に基づいて X がコンパクトであることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分空間 Z を $Z=\{z\in\mathbb{R}\mid z$ は有理数で $0\leq z\leq1\}$ とする．Z はコンパクトか，それともコンパクトでないか．コンパクトの定義に基づいて論証せよ．