平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)	受験番号	M

次の［1］,［2］,［3］の全問に解答せよ．

[1] 実数の数列全体がなすベクトル空間 V を考える．ただし，数列 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$，$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$，実数 c に対し，和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ とスカラー倍 $c\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots\}, \qquad c\mathbf{a} = \{ca_1, ca_2, ca_3, \ldots\}$$

で定まるものとする．V の部分集合 W を

$$W = \{\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \ : \ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)\ \}$$

で定める．

(1) W は V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\varphi : W \to W$ は第１項を取り除く写像，すなわち $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ に対し $\varphi(\mathbf{a}) = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ とする．φ は線形写像であることを示せ．

(3) $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \in W$ は $x_1 = 1, x_2 = 0$ により定まる数列，$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\} \in W$ は $y_1 = 0, y_2 = 1$ により定まる数列とする．このとき，$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ は W の基底をなすことを示せ．

(4) 基底 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ のもとでの φ の行列表示 A を求めよ．また，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(5) φ のそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとなる数列の一般項を求めよ．

(6) $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ をそれぞれ固有ベクトルの線形結合として表し，それを用いて $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の一般項を求めよ．

[2] 次に答えよ．

(1) 正数 M で $|\sum_{n=1}^{m} \sin nx| \leq M \ \ (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4},\ m = 1, 2, 3, \ldots)$ をみたすものが存在することを示せ．

（ヒント：$2 \sin nx \, \sin x = \cos(n-1)x - \cos(n+1)x$ ）

(2) $m = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$g_m(x), s_m(x)$ を

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin nx}{n}, \quad s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \sin nx$$

で定める．このとき，次を示せ．

$$g_m(x) = \frac{1}{m} s_m(x) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n(n+1)} s_n(x) \quad (m = 2, 3, 4, \ldots)$$

(3) 関数列 $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ は区間 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ で一様収束することを示せ．

(4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ は区間 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ で微分可能であることを示せ．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

[3]　ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ における円の全体からなる集合を X とおき，$C(P, r)$ を点 P を中心とし半径 r の円 $\{Q \in \mathbb{R}^2 :\ d(P, Q) = r\}$ とする．ただし，一点は半径 $r = 0$ の円とみなす．X の元 $C(P_1, r_1)$, $C(P_2, r_2)$ に対し，

$$\widetilde{d}(C(P_1, r_1), C(P_2, r_2)) = d(P_1, P_2) + |r_1 - r_2|$$

と定める．

(1) $\widetilde{d}$ は X 上の距離になることを示せ．

(2) 距離空間 $(X, \widetilde{d})$ は完備であることを示せ．

(3) X の元 $C(P, r)$ に，円 $C(P, r)$ の面積を対応させる X 上の関数を $f : X \to \mathbb{R}$ とする．f は X 上で連続であることを示せ．

(4) 円の列 $\{C_n\}$ が円 C に X で収束するとき，任意の点 $Q \in C$ に対して点列 $\{Q_n\}(Q_n \in C_n)$ で Q に収束するものが存在することを示せ．

(5) $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合 K に含まれる円全体の集合 Y は X の閉集合であることを示せ．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

選択問題：次の［4］～［8］の５問中の２問を選んで解答せよ．

[4]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A] $\mathbb{Z}$ を整数環とする．群 G に対し，

$$X = \{\text{ 群の全射準同型写像 } f : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ \}, \quad Y = \{G \text{ の指数 } 2 \text{ の正規部分群}\}$$

とおく．

(1) $f \in X$ に対し，$\mathrm{Ker}(f) \in Y$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Ker}(f)$ は f の核である．

(2) 対応 ：$X \ni f \mapsto \mathrm{Ker}(f) \in Y$ は１対１対応であることを示せ．

(3) $G = \mathbb{Z}^n$ を加法群とするとき，Y の元の個数を求めよ．

(4) $m_1, m_2, \ldots, m_n$ を n 個の自然数とし，$G = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ とする．$m_1, m_2, \ldots, m_n$ のうち r 個が偶数のとき，Y の元の個数を求めよ．

(5) 有限生成アーベル群 G が指数２の部分群をもつためには，G が無限巡回部分群をもつかまたは位数２の元をもつことが必要十分であることを示せ．

[B] 多項式 $x^5 - 2$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を E とし，ω を１の原始５乗根とする．

(1) 拡大次数 $[E : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(2) $G = \mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q})$ を E の $\mathbb{Q}$ 上の自己同型群とするとき，G の位数を求めよ．

(3) G の元 σ, τ を次のように定める．

$$\sigma : \sqrt[5]{2} \mapsto \sqrt[5]{2}\,\omega, \quad \omega \mapsto \omega, \qquad \tau : \sqrt[5]{2} \mapsto \sqrt[5]{2}, \quad \omega \mapsto \omega^2.$$

このとき，

(a) σ, τ のそれぞれの位数を求めよ．
(b) $\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^i$ をみたす自然数 i ($1 \le i \le 5$) を求めよ．

(4) G の部分群をすべて求め，それらを σ, τ を用いて表せ．

(5) $E/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[５]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　長方形の上下の対辺と左右の対辺をそれぞれ同一視してできる，２次元トーラス T^2 を考える．T^2 の任意の３角形分割について，0 単体の個数を α_0，1 単体の個数を α_1，2 単体の個数を α_2 とする．

(1) $3\alpha_2 = 2\alpha_1$ である理由を述べよ．

(2) ２つの 0 単体を結ぶ 1 単体の個数は１つ以下である．$\alpha_0^2 - \alpha_0 - 2\alpha_1 \geq 0$ を示せ．

(3) T^2 のオイラー数 $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ を求めよ．

(4) $\alpha_0 \geq 7$ を示せ．

(5) $\alpha_0 = 7$ となる T^2 の３角形分割を１つ図示せよ．

(6) T^2 の１次元ホモロジー群を求めよ．

[B]　$\mathbb{R}^3$ の単位球面

$$S^2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

と３次元回転群

$$SO(3) = \{3 \times 3 \text{ 実行列 } T \,:\, {}^tTT = E,\ \det T = 1\} \subset \mathbb{R}^9 \qquad ({}^tT \text{ は } T \text{ の転置行列}, E \text{ は恒等行列})$$

を考える．

(1) S^2 には２次元多様体の構造が入ることを示せ．

(2) S^2 の直交する２点の集合

$$W = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^2 \times S^2 \,:\, {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = 0\}$$

に対する $SO(3)$ の作用を $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (T\mathbf{x}, T\mathbf{y})$ で定義する．このとき，$T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ならば，$T = E$ であることを示せ．ただし，$\mathbf{e}_1 = {}^t(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = {}^t(0,1,0)$ とする．

(3) 任意の組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ に対し $T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ となる $T \in SO(3)$ が存在することを示せ．

(4) $SO(3)$ は W に同相であることを示せ．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[6]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A] 次に答えよ．

(1) a を 0 ではない複素数とするとき，$\dfrac{1}{z}$ を a のまわりで べき級数に展開し，その収束半径を求めよ．

(2) $a \in \mathbb{C}$，$R > 0$ とし，f を開円板 $B(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ で正則な関数とする．このとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

とべき級数展開できることを示せ．ただし，r は $r < R$ をみたす任意の正数とする．

(3) F を領域 D で正則な関数とする．$z \in D$ のまわりで F をべき級数展開したときの収束半径を $R(z)$ で表すとき，以下の２つのうちいずれか一方のみが起こることを示せ．

(a) 任意の $z \in D$ に対して，$R(z) = +\infty$ となる．

(b) 任意の $z \in D$ に対して，$R(z) < +\infty$ となる．

(4) 前問 (3) の (b) のもとで，$R : D \to (0, \infty)$ は連続関数になることを示せ．

[B] 次に答えよ．

(1) $t > 0$ のとき，$e^{-x} x^{t-1}$ $(x \in (0, +\infty))$ は x の関数として $(0, +\infty)$ で可積分であることを示せ．

(2) $(0, +\infty)$ 上の可積分関数 $f(x)$ で 任意の $x \in (0, +\infty)$ と任意の $t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ に対して

$$|e^{-x} x^{t-1} \log x| \leq f(x)$$

をみたすものが存在することを示せ．

(3) $t > 0$ に対して $\Gamma(t)$ を

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx$$

で定義する．このとき，$\Gamma(t)$ は $t = 1$ において微分可能で，

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \log x \, dx$$

が成り立つことを示せ．

(4) 次の極限の存在と等号の成立を示せ．

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r \left(1 - \frac{x}{r}\right)^r \log x \, dx = \Gamma'(1).$$

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［7］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　ℓ を実数とし，f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする．$x(t)$ を常微分方程式

$$x''(t) + (x'(t))^3 + f(x(t)) = 0, \quad t \geq 0$$

の解で $\lim_{t\to\infty} x(t) = \ell$ をみたすものとする．また

$$V(t) = (x'(t))^2 + 2\int_0^t (x'(s))^4\,ds + 2F(x(t)), \qquad F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$$

とおく．

(1) $V(t)$ は t によらない定数となることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty (x'(s))^4\,ds < \infty$ を示せ．

(3) $\lim_{t\to\infty} x'(t)$ の存在を示せ．また，その極限値が 0 となることを示せ．

(4) $f(\ell) = 0$ を示せ．

[B]　次に答えよ．

(1) ２点境界値問題

$$(*) \quad \begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ x'(0) = 0, \quad x(1) = 0 \end{cases}$$

が $x(t) \not\equiv 0$ となる解を少なくとも一つもつような $\lambda \in \mathbb{R}$ をすべて求めよ．

以下において $p(t)$ は $[0,1]$ 上の正値連続関数とし，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．$(*)$ を一般化した２点境界値問題

$$(\mathrm{P}_\lambda) \quad \begin{cases} x''(t) + \lambda p(t)x(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ x'(0) = 0, \quad x(1) = 0 \end{cases}$$

を考える．

(2) $x(t)$ を (P_λ) の解とするとき

$$\int_0^1 (x'(t))^2\,dt = \lambda \int_0^1 p(t)(x(t))^2\,dt$$

が成り立つことを示せ．また，$\lambda < 0$ のとき (P_λ) の解は $x(t) \equiv 0$ に限ることを示せ．

(3) $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ の関数 $G(t,s)$ を

$$G(t,s) = \begin{cases} 1-t & (0 \leq s \leq t \leq 1) \\ 1-s & (0 \leq t \leq s \leq 1) \end{cases}$$

で定義する．このとき，

(a) $t \in [0,1]$ の関数 $x(t)$ が

$$(**) \quad x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)p(s)x(s)\,ds$$

をみたすならば，$x(t)$ は (P_λ) の解であることを示せ．

(b) 逆に，(P_λ) の解は $(**)$ をみたすことを示せ．

(4) $\lambda_0 > 0$ が存在して (P_λ) が $x(t) \not\equiv 0$ であるような解をもつならば $\lambda \geq \lambda_0$ となることを示せ．

平成１４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[8]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

[A] n を２以上の自然数とし，$\mathbb{Z}$ を整数全体とする．集合 Ω と Ω' を

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \omega_1 = 1, |\omega_i - \omega_{i+1}| = 1 \, (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

$$\Omega' = \{\omega' = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^{n} : \omega_1 = 1, |\omega_i - \omega_{i+1}| = 1 \, (i = 1, 2, \ldots, n-1)\}$$

で定義する.

(1) 各 $(\omega', \xi) = ((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \xi) \in \Omega' \times \{-1, 1\}$ に対して,

$$\varphi((\omega', \xi)) = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_n + \xi)$$

で定義される写像 $\varphi : \Omega' \times \{-1, 1\} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ を考える．このとき，φ は単射となり，その像は Ω に等しいことを示せ.

以下，P は Ω の部分集合 A に対して $P(A) = \sharp A / \sharp \Omega$ で定義される確率測度とする．ただし，$\sharp A$ は集合 A の元の個数を表す．また，$i = 1, 2, \ldots, n+1$ に対し確率変数 X_i を $X_i(\omega) = \omega_i$ と定義する.

(2) $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を有界関数とするとき,

$$E(f(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})) = \frac{1}{2\sharp\Omega'} \sum_{\omega' \in \Omega'} \{f(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_n + 1) + f(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_n - 1)\}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 確率変数 $X_{n+1} - X_n$ は n 次元確率ベクトル $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ と独立であることを示せ.

[B] $\mathbb{R}$ を１次元ユークリッド空間とする．$a, b, c \in \mathbb{R}$，$a < b < c$ とし，２つの開区間 $(-\infty, c)$，(a, ∞) を含む $\mathbb{R}$ の最小の σ 集合体を $\mathcal{B}$ とする．P を $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度で，$E \in \mathcal{B}$ に対して確率 $P(E)$ は

$$a \in E \quad \text{のとき,} \quad P(E) \geq \frac{2}{9},$$

$$b \in E \quad \text{のとき,} \quad P(E) \geq \frac{1}{3},$$

$$c \in E \quad \text{のとき,} \quad P(E) \geq \frac{4}{9}$$

をみたすものとする.

(1) $(a, c) \in \mathcal{B}$ を示し，余事象 $(a, c)^c$ の下での (a, ∞) の条件付き確率を求めよ.

(2) X と Y はそれぞれ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ 上の実数値確率変数で

$$X(a) = 1, \quad X(b) = 2, \quad X(c) = 0,$$

$$Y(a) = 0, \quad Y(b) = 0, \quad Y(c) = 1$$

をみたすものとする．$Y = 0$ の下での X の条件付き分布関数を $F(x)$ とするとき，$y = F(x)$ のグラフを書け.

(3) (Z, W) を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ 上の２次元確率ベクトルとする．Z, W のどちらも２つ以上の値をとるならば Z, W は独立でないことを示せ.