平成１５年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を長さ 1 の定ベクトルとする．$\mathbb{R}^3$ の標準内積により $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ で定まる平面 π を考える．任意に与えられた点 P を端点とするベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ に対して，P から π に垂線を下ろしたときの垂線と平面 π との交点を Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を $\mathbf{a}$ および $\mathbf{v}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ に対して，平面 π に関して $\mathbf{v}$ と対称なベクトル $\overrightarrow{OR}$ を対応させる写像を φ とする．このとき，$\varphi(\mathbf{v})$ を $\mathbf{a}$ および $\mathbf{v}$ を用いて表せ．

(3) φ は線形写像であることを示せ．

(4) φ の基本単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する表現行列 A を求めよ．

(5) A を対角化せよ．

[2] 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ と $\log(1+x)$ $(|x| < 1)$ の 0 のまわりにおけるテイラー展開を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ をみたす実数列とするとき，$v \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{v}{n} + a_n\right)^n = e^v$$

が成り立つことを示せ．

(3) f は閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数とする．このとき，

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^2} \int_0^1 \left(\cos(hx) - 1 + \frac{h^2 x^2}{2}\right) f(x)\, dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) g は $\mathbb{R}$ 上の非負値連続関数で，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\, dx$ が収束すると仮定する．このとき，

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(hx) - 1 + \frac{h^2 x^2}{2}\right) g(x)\, dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I		受験番号	M

[3] (X, d) を距離空間とする．A を X の空でない部分集合とするとき，$x \in X$ に対して $d_A(x) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \in A$ ならば $d_A(x) = 0$ であることを示せ．

(2) $x \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は $d_A(x) = 0$ であることを示せ．ただし，$\bar{A}$ は A の閉包を表す．

(3) 任意の $x, y \in X$ に対して，$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ が成り立つことを示せ．

(4) $A, B \subset X$ を空でないとするとき，$d_A(x) + d_B(x) > 0$ が任意の $x \in X$ に対して成り立つための必要十分条件は $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ であることを示せ．

(5) $A, B \subset X$ を空でない閉集合で $A \cap B = \emptyset$ であるとする．このとき，連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で，$f(A) = \{1\}$，$f(B) = \{0\}$ となるものが存在することを示せ．

(6) $C(X)$ を X 上の実数値連続関数全体の成す線形空間とする．このとき，$C(X)$ が有限次元であれば，X は有限集合であることを示せ．