平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] $V = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \,:\, A^* = -A, \operatorname{tr} A = 0\}$ とする．ここで，$M(2,\mathbb{C})$ は２次の複素正方行列の全体であり，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して A^* はその随伴行列 $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ を表すものとする ($\bar{a}$ は a の複素共役).

(1) V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示せ.

(2) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$，$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$v_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (i は虚数単位) とするとき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の基底をなすことを示せ.

(3) $X \in V$ を１つ固定して，写像 $f : V \to V$ を $f(A) = XA - AX \quad (A \in V)$ と定めるとき，f は線形変換であることを示せ.

(4) $X = \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ とするとき， f の (2) で与えた基底に関する行列表示 F を求めよ.

(5) $f(A) \neq O$ なる $A \in V$ が存在するならば，$\operatorname{rank} f = 2$ であることを示せ.

[2] m を非負の整数，n を正の整数とする．$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の関数 $g_m(x)$, $f_{m,n}(x)$ を次のように定義する．

$$g_m(x) = \begin{cases} x^m \sin(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$f_{m,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g_m(x - \frac{k}{n})$$

(1) $g_1(x)$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で連続であるが，$x = 0$ で微分可能ではないことを示せ.

(2) $m \geq 2$ のとき，$g_m(x)$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ．このとき，導関数 $g'_m(x)$ が $\mathbb{R}$ で連続であるような m の範囲を求めよ.

(3) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ の各点において，極限 $f_m(x) = \lim_{n \to \infty} f_{m,n}(x)$ が存在することを示せ.

(4) $\dfrac{d}{dx} f_3(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{d}{dx} f_{3,n}(x)$ が成り立つことを示せ.

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)		受験番号	M

[3] $C[0,1]$ は閉区間 $[0,1]$ 上定義された実数値連続関数の全体を表わすものとし，$f,\, g \in C[0,1]$ に対して $d(f,g)$ を

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定義する．また，D，E をそれぞれ

$$D =\{f \in C[0,1] : \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \le 1\},$$
$$E =\{f \in D : \sup_{x,\,y\in[0,1]\,:\,x\ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \le 1\}$$

で与えられる $C[0,1]$ の部分集合とする．このとき，以下の問に答せよ．

(1) d は $C[0,1]$ 上の距離関数となり，$(C[0,1], d)$ は距離空間となることを示せ．

(2) D および E は 距離空間 $(C[0,1], d)$ の閉集合であることを示せ．

(3) $f_n,\, n = 1,\, 2,\, \ldots$ を E の元からなる列で，$[0,1]$ に属するどんな有理数 r に対しても $\lim_{n\to\infty} f_n(r)$ が存在するようなものとする．このとき，各有理数 $r \in [0,1]$ に対して

$$f_0(r) = \lim_{n\to\infty} f_n(r)$$

と定義すれば，f_0 は $C[0,1]$ の元に一意的に拡張できることを示せ．

(4) D は $(C[0,1], d)$ においてコンパクト集合ではないことを示せ．

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

選択問題：次の［4］～［8］の５問中の２問を選んで解答せよ.

［4］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

[A] S_n を n 次対称群, $Aut(S_n)$ を S_n の自己同型群とするとき, 次の問に答えよ.

(1) 4 次対称群 S_4 の位数 6 の部分群は次の 4 つの位数 6 の部分群 H_1, H_2, H_3, H_4 のいずれかに等しいことを証明せよ. ただし,

$$H_i = \{\ \sigma \in S_4\ :\ \sigma(i) = i\ \} \qquad (\ 1 \le i \le 4\ )$$

である.

(2) $H_i \cap H_j \quad (i \ne j, 1 \le i, j \le 4)$ を求めよ.

(3) $Aut(S_4)$ の元 f に対し, $f(H_k) = H_{i_k} \quad (1 \le k \le 4)$ であるとき, S_4 の元 $\varphi(f)$ を次の様に定める.

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}.$$

このとき, 写像 $\varphi : Aut(S_4) \ni f \mapsto \varphi(f) \in S_4$ は単射準同型であることを証明せよ.

(4) S_4 の中心 $Z(S_4) = \{\sigma \in S_4 :\ \sigma\tau = \tau\sigma \quad (\forall \tau \in S_4)\}$ を求めよ.

(5) (3) の写像 $\varphi : Aut(S_4) \to S_4$ は同型写像であることを証明せよ.

[B] R を単項イデアル整域、I を R 上の一変数多項式環 $R[x]$ のイデアルとする. 以下に答えよ. ただし, 単多項式とは最高次数の係数が 1 の多項式である. また, (4) と (5) では R は有理整数環 $\mathbb{Z}$ とする.

(1) 0 以上の整数 m に対して,

$$J_m = \left\{ a \in R :\ \begin{array}{l} \text{ある } b_1, b_2, \cdots, b_m \in R \text{ が存在して} \\ ax^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \in I \end{array} \right\}$$

と定めると, $\{J_m : m \ge 0\}$ は R のイデアルの増大列になることを示せ.

(2) I を零イデアルでないとし, m_0 を $J_{m_0} \ne (0)$ となる最小の整数とする. このとき, $J_{m_0} = (s)$ とすると, 商環 $R[\frac{1}{s}][x]$ のイデアル $IR[\frac{1}{s}][x]$ は単項イデアルになることを示せ.

(3) $\mathfrak{p}$ を R の素イデアル, f を $R[x]$ に属する n 次単多項式とする. $g \in R[x]$ に対して, fg の n 次以上の係数がすべて $\mathfrak{p}$ に属すると, g は $\mathfrak{p}R[x]$ に属することを示せ.

(4) I が $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルならば, J_0 が $\mathbb{Z}$ の極大イデアルになることを示せ.

(5) I が $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルならば, I はちょうど 2 つの元で生成されることを示せ.

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［５］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

[A] 以下で与えられる $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxz = 1 \right\} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

について以下の問に答えよ.

(1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(2) まず $b = 0$ の場合を考える．$a > 0$ ならば，S はコンパクトであり $a \leq 0$ ならば，コンパクトにならないことを示せ.

(3) $b = 2$ のとき，S が連結にならないような a の値を 1 つ求め，理由も記せ.

(4) 以下の３つの設問については，その中から，いずれか１問だけ選んで解答せよ.

(イ) $a = -1$ かつ $b = 0$ のとき，S に包含写像が埋め込みになるような多様体の構造が入ることを示せ.

(ロ) $a = b = 0$ のとき，S の定める回転面のガウス曲率と平均曲率を計算せよ.

(ハ) S が連結にならないような a, b の組み合わせをすべて求めよ.

[B] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の正方形

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 1 \right\}$$

から，各 $x \in [-1, 1]$ について，点 $(x, -1)$ と 点 $(x, 1)$ を同一視し，各 $y \in [-1, 1]$ について，点 $(-1, y)$ と 点 $(1, y)$ を同一視して得られる曲面を F_1 とする．また，正方形 S から，各 $x \in [-1, 1]$ について，点 $(x, -1)$ と 点 $(x, 1)$ を同一視し，各 $y \in [-1, 1]$ について，点 $(-1, y)$ と 点 $(1, -y)$ を同一視して得られる曲面を F_2 とする.

(1) F_1 の１次元ホモロジー群を求めよ.

(2) F_1 と F_2 は同相ではないことを示せ.

(3) F_1 と F_2 から開集合

$$\left\{ (x, y) \in S \,:\, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ \ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \right\}$$

を取り除いて得られる曲面をそれぞれ E_1，E_2 とする．これらは互いに，同相であるかどうか，また，ホモトピー同値であるかどうかを，それぞれ簡単に理由をつけて答えよ.

(4) F_1 のどの点の逆像も 2 点となるような，連続写像 $f : F_1 \to F_1$ を 1 つ構成せよ．また，F_2 のどの点の逆像も 2 点となるような，連続写像 $g : F_1 \to F_2$ を 1 つ構成せよ.

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［6］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　a を正の定数とする．正数 R に対して曲線 γ_R を $\gamma_R(\theta) = R\,e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ によって定め，

$$I(R) = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(1+a^2z^2)} dz$$

とおく．

(1) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to 0+} I(R) = \pi i$ となることを示せ．

(3) 次の式を証明せよ．

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(1+a^2x^2)} dx = (1 - e^{-1/a})\frac{\pi}{2}.$$

[B]　次に答えよ．ただし，以下の各問において，f, $f_n (n = 1, 2, \dots)$ はすべて開区間 $(0, 1)$ 上のルベーグ可積分である実数値関数とする．

(1) $\{f_n\}$ は開区間 $(0, 1)$ 上で一様に f に収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

であることを示せ．

(2) $\{f_n\}$ は開区間 $(0, 1)$ に含まれるすべての閉区間上で一様に f に収束するが，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ に収束しないような関数列 $\{f_n\}$ の例を作れ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \{f_n(x) - f(x)\}^2 dx = 0$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

となることを示せ．

(4) $f_n \geq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ であり，ほとんどすべての点 x で $f_n(x)$ は $f(x)$ に収束し $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2dx < \infty$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)^2dx = \int_0^1 f(x)^2dx$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \{f_n(x) - f(x)\}^2 dx = 0$$

となることを示せ．

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

［7］　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

[A] 関数 $a(t)$ は $t \in \mathbb{R}$ 上の連続関数とし, $\sigma > 0,\ \alpha,\ \beta$ は定数とする. 次の微分方程式を考える.

$$(\ast)\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) - (\sigma^2 + a(t))y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = \beta. \end{cases}$$

(1) 連続な関数 $h(t)$ に対し, 常微分方程式 $(\dfrac{d}{dt} + \sigma)z(t) = h(t)$ と $(\dfrac{d}{dt} - \sigma)w(t) = h(t)$ の一般解 $z(t),\ w(t)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 連続な関数 $f(t)$ に対し, 常微分方程式 $(\dfrac{d^2}{dt^2} - \sigma^2)u(t) = f(t)$ の一般解 $u(t)$ は任意定数 A, B と

$$G(t,s) = \frac{1}{2\sigma}(e^{\sigma(t-s)} - e^{-\sigma(t-s)})$$

を用いて次のように表されることを示せ.

$$u(t) = Ae^{\sigma t} + Be^{-\sigma t} + \int_0^t G(t,s)f(s)ds.$$

(3) (2) の $G(t,s)$ を用いて，初期値問題（＊）を同値な積分方程式に変換せよ.

(4) (3) の積分方程式を用いて, 初期値問題（＊）の C^2 級の解はただ一つであることを示せ.

[B] α を実定数として連立微分方程式

$$(\mathrm{S})\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y + x^2 y \end{cases}$$

の $t \geq 0$ における解 (x,y) を考える．また $v(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ とおく．

(1) （S）の解 (x,y) がある $T \geq 0$ で $(x(T),y(T)) = (0,0)$ をみたせば, $[0,\infty)$ 上 $(x,y) \equiv (0,0)$ であることを示せ.

(2) $\alpha < 0$ とする．このとき

$$\frac{dv}{dt} \leq -\delta v + 2v^2$$

となる定数 $\delta > 0$ が存在することを示せ．また（S）の解 (x,y) が $\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t)) = (0,0)$ をみたすならば，ある定数 A, $\rho > 0$ に対して

$$|x(t)|,\ |y(t)| \leq Ae^{-\rho t} \qquad (t：十分大)$$

となることを示せ.

(3) $\alpha > 0$ とする．このとき

$$\frac{dv}{dt} \geq \delta v - 2v^2$$

となる定数 $\delta > 0$ が存在することを示せ. また（S）の解 (x,y) で $\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t)) = (0,0)$ となるものは，$[0,\infty)$ 上 $(x,y) \equiv (0,0)$ であるものに限ることを示せ.

平成１５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午後)		受験番号	M

[8]　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ.

[A] 正の整数全体を $\mathbb{N}$ で表す. $\{X_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上のたがいに独立で，いずれも 2 点集合 $\{0,1\}$ 上の一様分布に従う確率変数列とする．また $0<p<1$ とする．各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Y_n=(2p)^{\sharp\{k\le n\,:\,X_k=1\}}(2-2p)^{\sharp\{k\le n:\,X_k=0\}}$$

とおく．ただし，$\sharp$ は集合の元の個数を表す.

(1) 各 Y_n は $\mathcal{F}$ 可測であることを示せ.

(2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $E[Y_n]=1$, $E[Y_nX_n]=p$ であることを示せ.

(3) 大数の強法則を用いて確率変数列 $\{(\log Y_n)/n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ は概収束することを導け.

(4) $E[\liminf_{n\to\infty}Y_n]=1$ であるための条件を求めよ.

[B] 確率変数 $X_1,\dots,X_n$ $(n\ge 2)$ はたがいに独立で，いずれも同じ確率密度関数

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

をもつ正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ に従うものとし，

$$W=\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2,\quad U=\frac{1}{n-1}W,\quad V=\frac{1}{n}W$$

とおく．さらに，H を n 次の直交行列とし，

$$\begin{bmatrix} Z_1\\ \vdots\\ Z_n\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix} X_1-\mu\\ \vdots\\ X_n-\mu\end{bmatrix}$$

とする.

(1) W は

$$W=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2-\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right\}^2$$

と表せることを示せ．また，直交行列 H の第 1 行を $(1/\sqrt{n},\dots,1/\sqrt{n})$ と定めることによって，$W=\sum_{j=2}^{n}Z_j^2$ と表せることを示せ.

(2) $(Z_1,\dots,Z_n)$ の確率密度関数を求めることによって，$Z_1,\dots,Z_n$ はたがいに独立で，いずれも正規分布 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$ に従うことを示せ.

(3) 次が成り立つことを示せ.

$$E[(V-\sigma^2)^2]=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4<E[(U-\sigma^2)^2]=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$