平成１６年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目I		受験番号	M

平成１６年　1月　２９日　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）	３　枚
解答用紙	３　枚
下書用紙	１　枚

２. 問題は全部で　３　問ある.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１６年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) A のカーネル，すなわち方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の，次元と基底を求めよ．

(2) $B = A^2$ を計算し，B の固有値を全て求めよ．

(3) B を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}BP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P を一つ求めよ．

(4) X を n 次複素正方行列とする．命題「X^2 が対角化可能であれば X は対角化可能である」は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

(5) X を n 次複素正則行列とする．命題「X^2 が対角化可能であれば X は対角化可能である」は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

[**2**] 次の 6 問に答えよ．

(A1) 実数列 a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が性質

$$(*) \quad |a_1| > |a_2| > |a_3| > \cdots \text{ かつ } a_{2k+1} > 0,\ a_{2k+2} < 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たすとする．

部分和 $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を考えたとき，数列 S_{2k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ は単調減少であることを示せ．

(A2) (A1) において，無限級数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が収束しない例を挙げよ．

(B1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ が収束するかどうか，判定せよ．

(B2) $s > 0$ とする．$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} \sin x dx$ を求めよ．

(B3) $\displaystyle\lim_{u \to +0} \int_0^{\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を示せ．

(B4) $u > 0$ に対し $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\int_u^{\infty} e^{-sx} ds \right) \sin x dx = \int_u^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} \sin x dx \right) ds$ を示し，$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ．

平成１６年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

[3] 以下では

$$f \text{ を閉区間 } [0,1] = \{x \mid 0 \le x \le 1\} \text{ から実数の集合への連続写像}$$
$$g \text{ を半開区間 } (0,1] = \{x \mid 0 < x \le 1\} \text{ から実数の集合への連続写像}$$

とする．このとき，次の 6 問に答えよ．
　ただし，コンパクト集合上の実数値連続関数に関する最大値の定理は必要ならば証明なしで用いてよい．

(A1) f は最大値をとると言えるか. 言えるならば理由を明記し，言えなければ反例を示せ.

(A2) g は最大値をとると言えるか. 言えるならば理由を明記し，言えなければ反例を示せ.

(A3) g は最大値または最小値のどちらか少なくとも一つはとると言えるか.
言えるならば理由を明記し，言えなければ反例を示せ.

(B1) f の像にはどんなものがあり得るか. 全ての可能性を求め，その理由を明記せよ.

(B2) f が単射であると仮定する. f の像を I とおく.
このとき，f は $[0,1]$ から I への同相写像であると言えるか.
言えるならば証明し，言えなければ反例をあげよ.

(B3) g の像にはどんなものがあり得るか，全ての可能性を求めよ.