# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目(午後) | | 受験番号 | M |
|---|---|---|---|---|

平成１５年　８月　２０日　　　　１３：３０　～　１６：３０

## 注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

| | |
|---|---|
| 問題用紙（表紙を含む.） | 7　枚 |
| 解答用紙 | 2　枚 |
| 下書用紙 | 1　枚 |

２. 問題は全部で　6　問ある. この中から　2　問選んで解答せよ.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目(午後) |
|---|---|

選択問題：次の［4］～［9］の６問中の２問を選んで解答せよ．

**［4］**　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A] $G$ を群，$X$ を $G$ の左作用（以下，単に作用と呼ぶ）が与えられている集合とする．すなわち写像

$$G \times X \to X \quad (g, x) \mapsto g(x)$$

が与えられ，任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し $g(h(x)) = (gh)(x)$, $e(x) = x$ が成り立つものとする ($e$ は $G$ の単位元)．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 写像の合成による演算で $X$ から $X$ への全単射全体の集合を群にしたものを $S(X)$ とする． 写像 $\rho : G \to S(X)$ を $\rho(g)(x) = g(x)\,(g \in G, x \in X)$ と定めると，$\rho$ は準同型になることを証明せよ．

(2) $G$ の $X$ への作用が忠実であるとは，$g(x) = x\,(\forall x \in X) \Rightarrow g = e$ が成立することである．この条件と，(1) の $\rho$ が単射であることが同値であることを証明せよ．

(3) $G$ を有限アーベル群とする．$G$ の $X$ への作用が可移，すなわちある $x \in X$ に対して $X = \{g(x) | g \in G\}$ となると仮定する．このとき，$G$ の $X$ への作用が忠実であることと，$|X| = |G|$ であることが同値であることを証明せよ．ここで $|X|$ は $X$ の，$|G|$ は $G$ の元の個数を表す．

(4) $G$ を 位数が素数のべきである巡回群とする．このとき，$G$ の $X$ への作用が忠実であることと，$X$ のある元 $x$ の固定化部分群 $G_x = \{g \in G \,|\, g(x) = x\}$ が単位部分群 $\{e\}$ となることが同値であることを証明せよ．

(5) $G_1, G_2$ をそれぞれ位数が素数のべきである非自明な巡回群，$G = G_1 \times G_2$ を $G_1, G_2$ の直積とする．このとき，$G$ の忠実な作用を持つ有限集合 $X$ で $|X|$ が最小となるものを一つ構成せよ．

[B] $S_4$ を４次対称群，$K = \mathbf{Q}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の４変数有理関数体とし，$S_4$ の $K$ への $\mathbf{Q}$-自己同型作用を次の様に定義する: 任意の $\pi \in S_4$ に対し，

$$\pi : \quad x_i \quad \mapsto \quad x_{\pi(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

$S_4$ の部分群 $H$ に対し，$K^H$ で $K$ の $H$ による不変部分体

$$K^H = \{f \in K \,|\pi(f) = f \ (\forall \pi \in H)\}$$

を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $L = \mathbf{Q}(\ x_1 + x_2,\ x_3 + x_4,\ (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),\ \dfrac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4}\ )$ とおく．
$L \subset K^{<\sigma>}$ を示せ．ただし，$\sigma = (12)(34) \in S_4$，$< \sigma >= \{1, \sigma\}$ とする．

(2) 拡大次数 $[K : L]$ が 2 となることを示せ．

(3) $L = K^{<\sigma>}$ を示せ．

(4) $\tau = (13)(24)$ とし，$N = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ とおく．$N$ が $S_4$ の部分群であることを示せ．

(5) $M = K^N$ とおく．このとき，

$$M = \mathbf{Q}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),\ \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} + \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_2},\ (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} - \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_2})\ )$$

であることを示し，$M$ を $\mathbf{Q}$ 上の体として生成するのに必要な元の個数の最小値を求めよ．

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目 (午後) |
|---|---|

**［5］**　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　$S^2$ を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ を

$$f(u, v) = (\cos u \cos v,\ \sin u \cos v,\ \sin v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

で定める．以下，可微分とは $C^1$ 級（すなわち一回微分可能で導関数が連続）であることを表す．

(1) $f$ は上への写像 (全射) であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の曲線 $v = \tan^{-1}(2\cos u)$ の $f$ による像は $S^2$ のある大円に含まれることを示せ．

(3) $f$ は可微分多様体の間の可微分写像であることを示せ．

(4) $df_P$ を $f$ の $P$ における微分とする．$\mathrm{rank}\, df_P < 2$ となる $\mathbb{R}^2$ の点 $P$ をすべて求めよ．

(5) $g \circ f$ が $\mathbb{R}^2$ の恒等写像となるような可微分写像 $g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は存在しないことを示せ．

(6) $f \circ g$ が $S^2$ の恒等写像となるような可微分写像 $g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は存在しないことを示せ．

(7) 上が完答できない場合は，満点を超えない範囲で追加点を獲得できる可能性があるので，[B] の小問 (4) と (5) にも答えよ．

[B]　下図 (長方形) の左辺と右辺を上下反対向きに同一視してできる図形をメビウスの帯といい，$M$ で表す．

(1) メビウスの帯の境界は円周と同相だから，円板 $D^2$ を境界で張り合わせることができる．それを $P^2 = M \cup D^2$ とおく．$P^2$ の各点の近傍として開円板と同相なものがとれることを示せ．

(2) 上の図のような長方形を２つ用意し，$A$ と $B$ とする．$A$ の左辺と $B$ の右辺を上下反対向きに同一視し，$A$ の右辺と $B$ の左辺を上下反対向きに同一視すると円周と閉区間の直積 $S^1 \times [-1, 1]$ と同相になることを示せ．

(3) ２次元球面 $S^2$ から $P^2$ への２：１の連続写像が存在することを示せ．

(4) メビウスの帯の基本群，もしくは１次元ホモロジー群を求めよ．

(5) メビウスの帯から円周への連続写像 $f : M \to S^1$ が $P^2$ 上まで拡張されるならば，写像 $f$ は１点への写像とホモトピックであることを示せ．

(6) 上が完答できない場合は，満点を超えない範囲で追加点を獲得できる可能性があるので，[A] の小問 (5) と (6) にも答えよ．

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目(午後) |
| --- | --- |

**[6]**　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]

(1) 複素平面上の有理型関数

$$\frac{\pi}{z^3 \cos \pi z}$$

の，すべての極およびその留数を求めよ．

(2) $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$ とするとき，

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

が成り立つことを示せ．

(3) 自然数 $n$ に対して 4 点 $n + in, -n + in, -n - in, n - in$ を頂点とする長方形の周を $C_n$ とするとき

$$\int_{C_n} \frac{dz}{z^3 \cos \pi z} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を示せ．

(4) 等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

を証明せよ．

[B]　$f_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は閉区間 $[0, 1]$ 上のルベーグ可測関数であって，$n$ によらない定数 $M > 0$ が存在して

$$|f_n(t)| \leq M \qquad (\forall t \in [0, 1])$$

を満たし，かつほとんどいたるところ $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ が存在するとする．$a_n (n = 1, 2, \ldots)$ は $a_1 = 0$, $0 < a_n < a_{n+1} < 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を満たす数列とする．可測集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対して，$\chi_I(t) = 1$ $(t \in I)$, $\chi_I(t) = 0$ $(t \notin I)$ とする．閉区間 $I_j = [a_j - j^{-2}, a_j + j^{-2}]$ 　$(j = 1, 2, \ldots)$ に対して，関数列 $g_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を次で定義する．

$$g_n(t) = \sum_{j=n}^{2n} \chi_{I_j}(t).$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) + g_n(t) - f(t)| dt = 0$ を示せ．

(3) $t \neq 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$ を示せ．

(4) $\varphi(t)$ を $[0, 1]$ 上非負の可測関数であって，$t = 1$ で連続とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\varphi(t) dt = 0$ を示せ．

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目(午後) |
|---|---|

**［７］**　次の [A]，[B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　$p(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数，$a, b$ を $-\infty < a < b < +\infty$ なる実定数, $\lambda \in \mathbb{C}$ とし，微分方程式

$$(*) \quad x''(t) + \lambda p(t) x(t) = 0 \quad (a \le t \le b)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $x(t), y(t)$ を $(*)$ の連続な解とし，$W(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix}$ とおく．このとき，$W(t) \equiv$ 定数 を示せ．

(2) $(*)$ の解 $x(t), y(t)$ が $[a, b]$ で１次従属であるための必要十分条件は $W(t) = 0$ $(\forall t \in [a, b])$ であることを示せ．

(3) $x(t) \not\equiv 0$ を $x(a) = 0$ を満たす $(*)$ の１つの解とする．このとき，$y(a) = 0$ を満たす $(*)$ の任意の解 $y(t)$ に対して，$y(t) = cx(t)$ $(\forall t \in [a, b])$ となる複素定数 $c$ が存在することを示せ．

(4) $(*)$ の解で $x(a) = 0,\ x'(a) = 1$ を満たす解を $x(t; \lambda)$ で表す．関数 $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto x(b; \lambda)$ が正則であること（証明は不要）を用いて，任意の $M > 0$ に対し

$$\{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \le M,\ x(b; \lambda) = 0\}$$

が有限集合であることを示せ．

[B]　$a(t), b(t)$ を $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数として，連立微分方程式

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} x' &= a(t)x + b(t)y \\ y' &= b(t)x + a(t)y \end{cases}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $x + y = z$ とおくとき，$z$ の満たす１階線形微分方程式を求めよ. また $x - y = w$ とおくとき $w$ の満たす１階線形微分方程式を求めよ.

(2) 与えられた実数 $x_0,\ y_0$ に対して，(E) の解 $(x, y)$ で $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$ を満たすものを求めよ.

(3) ある定数 $m > 0$ に対して $[0, \infty)$ 上 $a(t) + b(t) \le -m$ かつ $a(t) - b(t) \le -m$ となるならば (E) の任意の解 $(x, y)$ に対して $\lim_{t \to \infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$ となることを示せ.

(4) ある定数 $m > 0$ に対して $[0, \infty)$ 上 $a(t) + b(t) \ge m$ かつ $a(t) - b(t) \ge m$ となるならば $(x, y) \equiv (0, 0)$ 以外の (E) の任意の解 $(x, y)$ はすべて $[0, \infty)$ 上非有界となることを示せ.

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　学 専 攻 | 専門科目 (午後) |
|---|---|

**［8］**　次の [A], [B] のうち１つを選び解答せよ．

[A]　$X, Y, Z$ は互いに独立な確率変数で，$P(X=k)=P(Y=k)=P(Z=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $(k=0,1,2,\cdots)$ であるとする．ここで $\lambda$ は正の実数である．

(1) $a, b, c$ を $a+b+c=1$ を満たす実数とする．$L=aX+bY+cZ$ の期待値 $\mathrm{E}[L]$ を求めよ．

(2) $T=X+Y+Z$, $t$ を非負の整数とするとき，$P(T=t)$ を $t, \lambda$ を用いて表せ．

(3) $T=t$ が与えられたときの $L$ の条件付き期待値 $\mathrm{E}[L|T=t]$ を求めよ．ただし，$t$ は非負の整数とする．

(4) $g(t)=\mathrm{E}[L|T=t]$ $(t=0,1,2,\cdots)$ とし，$L^*=g(T)$ と定義する．
$\mathrm{E}[(L-\lambda)^2] \geq \mathrm{E}[(L^*-\lambda)^2]$ が成り立つことを示せ．

[B]　$X_n$, $n \in \mathbb{N}$, を独立かつ同分布な実確率変数列で，ある $0 < p < 1$ に対して $P(X_1=0)=1-p$, $P(X_1=1)=p$ を満たすものとする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y_n=\sum_{i=1}^n X_i$ とし，また各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$N(k)=\min\{n \in \mathbb{N} : Y_n \geq k\}$$

と定義する. ここでは $\min\emptyset=\infty$ としておく ($\emptyset$ は空集合を表す).

(1) 各 $n, k \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つことを示せ. ただし $Y_0=0$ である.

$$P(Y_1<k, \ldots, Y_{n-1}<k, Y_n \geq k)=P(Y_{n-1}=k-1, X_n=1).$$

(2) 各 $n, k \in \mathbb{N}$ に対して $P(N(k)=n)$ を求めよ.

(3) $0<x<1$ のとき次が成り立つことを示せ. ただし $x^\infty=0$ である.

$$E[x^{N(k)}]=\frac{(px)^k}{(1-(1-p)x)^k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

(4) $0<x<1$ のとき次が成り立つことを示せ.

$$P(N(k) \leq a) \leq \frac{(px)^k}{x^a(1-(1-p)x)^k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}).$$

# 平成１６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　　学 専 攻 | 専門科目 (午後) |
|---|---|

**[9]**　次の問題に解答せよ．

ある大学に，同好会が $n$ 組ある．同好会のメンバーには重複を許す．

さて，各同好会のメンバーから，その会の会長を一人と副会長を一人選びたい．

但し，ある会の会長であるものは別の会の会長や副会長を兼任できない．また，一人の人は，多くても二つの会の副会長を兼ねることしかできないとする．

1. 二部グラフにおける結婚定理のステートメントを，知っていたら述べよ．以後，必要とあらばこの定理を使っても良い．

2. 上のような条件を満たすように全ての同好会の会長，副会長が選べたとする．
このとき，任意に同好会を $m$ 組もってきたとき，これらのいずれかの同好会に属する人の総数は $1.5m$ 以上であることを示せ．

3. 「任意の $m$ に対し，任意に同好会を $m$ 組もってきたとき，これらのいずれかに属する人の総数が $2m$ 以上」であれば，このような会長・副会長の選出が可能であることを示せ．

4. 次のステートメントが同好会の様子に関わらず成立するような正の実数 $C$ の，最小値を求めよ．

   任意の $m$ に対し「任意に同好会を $m$ 組もってきたとき，これらのいずれかに属する人の総数が $Cm$ 以上」であれば，このような会長・副会長の選出が可能である．