平成１７年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目I

受験番号	M

平成１７年　1月　２７日　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）	２　枚
解答用紙	３　枚
下書用紙	１　枚

２. 問題は全部で　３　問ある.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1]　f は $[0,\infty)$ 上の連続微分可能な実数値関数（すなわち、$f \in C^1[0,\infty)$）で、$\displaystyle\int_0^\infty |f'(t)|dt < \infty$ を満たしているとする。

(1)　有限な $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t) = r$ が存在することを示せ.

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f'(2nt)dt = \frac{r - f(0)}{2}$ となることを証明せよ.

(3)　$\alpha > 0$ に対して，$I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} f'(t)dt$ が有限確定することを示し，$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0$ となることを証明せよ.

(4)　$\alpha > 0$ に対して，$J(\alpha) = \alpha\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t)dt$ が有限確定することを示し，$\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} J(\alpha) = f(0)$ となることを証明せよ.

[2]　A, B は n 次の実正方行列で, $A + B = I_n$ (I_n は n 次の単位行列) を満たしているとする．また A, B の定める線形写像 $\mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}^n$ をそれぞれ f_A, f_B で表す.

(1)　Ker $f_A \subset$ Im f_B を示せ.

(2)　rank A + rank $B \geq n$ を示せ.

(3)　A の Jordan 標準型が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき, B の Jordan 標準型を求めよ.

(4)　rank A + rank $B = n$ が成り立つためには $A^2 = A$ の成り立つことが必要十分条件であることを証明せよ.

[3]　R^2 の 2 点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対し, $x_i \neq y_i$ となる i $(= 1, 2)$ の個数を $d(x, y)$ とする.

(1)　d は R^2 の距離になることを示せ.

(2)　x, y, z を R^2 の互いに異なる 3 点とする．$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ となるのは 3 点 x, y, z がどのような位置関係にあるときか.

(3)　R^2 に距離 d の定める位相を入れる．このとき任意の位相空間 X に対し, 写像 f : $\mathrm{R}^2 \longrightarrow X$ は常に連続になることを示せ.

(4)　R^1 に通常の位相を入れる．このとき写像 g : $\mathrm{R}^1 \longrightarrow \mathrm{R}^2$ が連続となるのは g がどのような写像のときか.