平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

選択問題：次の［4］～［12］の９問中の２問を選んで解答せよ.

［4］ $\mathbb{R}$ を実数体，$\mathbb{R}[x,y]$ を $\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環，(xy) を xy が生成する $\mathbb{R}[x,y]$ のイデアルとし，$\mathbb{R}[x,y]$ の元 h の剰余環 $\mathbb{R}[x,y]/(xy)$ での像を $\overline{h}$ で表すことにする．また，S を整域とする．

(1) $\mathbb{R}[x,y]/(xy)$ の素イデアルには，$\overline{x}$ または $\overline{y}$ のいずれかが含まれることを示せ.

(2) $f:\mathbb{R}[x,y]/(xy)\to S$ を環準同型とすると，f の核

$$\mathrm{Ker}(f)=\{a\in\mathbb{R}[x,y]/(xy)\ :\ f(a)=0\}$$

は素イデアルであることを示せ.

(3) 環準同型

$$f:\mathbb{R}[x,y]/(xy)\to S$$

の像になり得る環の同型類は 3 種類ある．それらをすべて求め，それぞれの場合について具体的に整域 S と環準同型 f を記述せよ.

［5］ 以下の問に答えよ.

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の 3 次拡大体 K の例を一つ挙げよ.（体であること，3 次拡大であることの証明は不要.）

(2) 上で挙げた K の部分体であって $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大となるものが存在しないことを証明せよ.

(3) n 元集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ からそれ自身への全単射全体がつくる群を n 次対称群といい，S_n であらわす．S_n の元のうち，1 を動かさないものの全体を

$$H=\{\sigma\in S_n\ :\ \sigma(1)=1\}$$

とおく．H が S_n の部分群であることを示せ.

(4) 指数 $[S_n:H]$ を求めよ.

(5) S_n の部分群で H を含むものは，H か S_n しか存在しないことを示せ.

(6) 体のガロア拡大で，ガロア群が S_n と同型となる例を一つ挙げよ.（証明は不要.）

(7) 任意の自然数 n に対し，次の条件を満たす体 K とその n 次拡大体 L が存在することを示せ.

L の部分体で K を含むものは，L または K しか存在しない.

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[６] $\mathbb{R}^3$ 内の円柱 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を考える.

(1) 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

によって定義する．一般の点 (x, y, z) におけるヤコビ行列 $(Jf)_{(x,y,z)}$ を求めよ.

(2) 円柱 M が可微分多様体であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の回転と平行移動で生成される群を G で表す.（すなわち, $G = \{(X, \boldsymbol{a}) \mid X \in SO(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3\}$ であり, 積は $(X, \boldsymbol{a})(X', \boldsymbol{a}') = (XX', \boldsymbol{a} + X\boldsymbol{a}')$ によって定義される.）群 G は $\mathbb{R}^3$ に $(X, \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = X\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ によって作用しているとする．円柱 M に推移的に作用する G の部分群 H が存在することを示せ.

(4) 円柱 M のガウス曲率，および平均曲率の絶対値が一定であることを示せ.

(5) a, b を $ab \neq 0$ を満たす実定数とする．$\gamma(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$ で与えられる曲線は M の測地線であることを示せ.

(6) (5) の曲線 γ は, (3) で求めた群 H の部分群による軌道であることを示せ.

[７] 以下の問に答えよ.

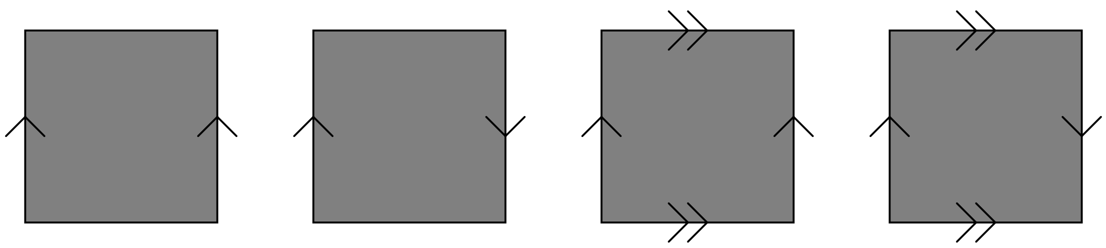
(1) 6つの文字 A, B, C, D, E, F を $\mathbb{R}^2$ 上の図形とみなすとき，これらをホモトピー同値によって分類せよ.（なぜそのように考えたか簡単に説明をつけること．ホモトピー同値写像は与えなくてもよい.）

(2) 単体的複体

$$K = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_0a_1|, |a_1a_2|, |a_2a_0|\}$$

のホモロジー群を求めよ.

(3) 正方形の辺を図のようにそれぞれ同一視して得られる曲面 X_1, X_2, X_3, X_4 について次に答えよ.



X_1　　X_2　　X_3　　X_4

(i) オイラー標数 $\chi(X_1)$ と $\chi(X_3)$ を求めよ.

(ii) 円周 S^1 とホモトピー同値であるものを列挙し，それらが S^1 とホモトピー同値である理由を簡潔に述べよ.

(iii) 向き付け不可能な曲面を列挙し，その理由を簡潔に述べよ.

(iv) これら４つの曲面はどの２つも同相ではない．その理由を述べよ.

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[8]　a を正定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素関数 $f(z)$ を次で定める．

$$f(z) = \frac{e^{-az}}{(1-z^2)(1+z)}.$$

$R > 2$ に対して Γ_R を，点 Ri と $-Ri$ を結んで出来る線分および原点中心で半径 R の円周の $\mathrm{Re}\ z \geq 0$ の部分を合わせてできる閉曲線に反時計まわりに向きをつけたものとする．このとき

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz$$

を求めよ．

(2) 次を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ay) - y\sin(ay)}{(1+y^2)^2} dy = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

(3) 複素関数 $g(z)$ を次で定める．

$$g(z) = \frac{e^{az}}{(1-z^2)(1+z)}.$$

$R > 2$ に対して C_R を，点 $-Ri$ と Ri を結んで出来る線分および原点中心で半径 R の円周の $\mathrm{Re}\ z \leq 0$ の部分を合わせてできる閉曲線に反時計まわりに向きをつけたものとする．関数 $g(z)$ を曲線 C_R に沿って積分することにより，次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ay) + y\sin(ay)}{(1+y^2)^2} dy.$$

(4) 次の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ay)}{(1+y^2)^2} dy, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\sin(ay)}{(1+y^2)^2} dy.$$

[9]　次の問に答えよ．

(1) $a < b$ に対して，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(a,b]} \sin(nx)\, dx = 0.$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < +\infty$ を満たす区間列 $(a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(a_k,b_k]} \sin(nx)\, dx = 0.$$

(3) A を区間 $(0, 2\pi]$ に含まれるルベーグ可測集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，区間 $(0, 2\pi]$ に含まれる区間列 $(a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ で次を満たすものが存在することを示せ．

$$\int_{(0,2\pi]} \left| 1_A(x) - \sum_{k=1}^{\infty} 1_{(a_k,b_k]}(x) \right| dx < \varepsilon.$$

ここで，一般に 1_A は集合 A の定義関数を表す．

(4) A を区間 $(0, 2\pi]$ に含まれるルベーグ可測集合とする．次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx)\, dx = 0.$$

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

［１０］　確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ は独立で同じ指数分布に従うとする．ここで，指数分布とは次の確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

をもつ確率分布である．正の整数 k に対して， U_k を

$$U_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$$

で定める．

(1) U_k の確率密度関数を求めよ．

(2) U_k の平均 μ_k，分散 σ_k^2 を求めよ．

(3) a を定数とする．$k \to \infty$ のとき $Z_k = \dfrac{U_k - ak}{\sqrt{3k}}$ がある確率分布に法則収束しているとする．このとき，a の値を求めよ．また，Z_k の極限分布は何か答えよ．

(4) $\dfrac{U_k}{U_{k+1}}$ は $k \to \infty$ のとき，ある定数に確率収束することを示せ．

［１１］　関数 $x(t), y(t)$ $(t \geq 0)$ を微分方程式

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = xy^2 - y^4 \end{cases}$$

の解とする．

(1) $x(t) > 0,\ y(t) > 0$ $(t \geq 0)$ で，$t \to \infty$ のとき，$x(t),\ y(t)$ はそれぞれ実数値 $a,\ b$ に収束するとする。このとき，次に答えよ．

  (a) $x(t) - \dfrac{1}{y(t)} \equiv$ 定数 である．

  (b) $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$ である．

  (c) $x(0) = \dfrac{9}{2},\ y(0) = 1$ のとき，$a,\ b$ の値を求めよ．

(2) $x(0) > 0,\ y(0) > 0$ のとき，$x(t) > 0,\ y(t) > 0$ $(t > 0)$ を示せ．

(3) $x(0) > 0,\ y(0) > 0,\ y(0)^2 < x(0)$ ならば，$t \to \infty$ のとき，$x(t),\ y(t)$ がそれぞれ実数値に収束することを示せ．

平成１７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[１２]　頂点集合 $V(0 < |V| < +\infty)$，有向辺の集合 $A \subset V \times V$ の有向グラフ $D = (V, A)$ を考える．実数値関数 $f : V \cup A \longrightarrow \mathbb{R}$ は次の条件 (F.1) と (F.2) を満たすとき D のフローという．

(F.1) 任意の $x \in V \cup A$ に対して $f(x) \geq 0$.

(F.2) 任意の $v \in V$ に対して $f(v) = \displaystyle\sum_{w \in (v,*)} f((v, w)) = \sum_{u \in (*,v)} f((u, v))$ が成り立つ.

ただし，$(v, *) = \{w \in V : (v, w) \in A\}, (*, v) = \{u \in V : (u, v) \in A\}$ である．また，$d^+(v) = |(v, *)|$, $d^-(v) = |(*, v)|$ と定義する.

(1) 頂点 v を通る閉路が存在するならば，$f(v) > 0$ を満たすフロー f が存在することを示せ.

(2) 頂点 v に対し，$f(v) > 0$ を満たすフロー f が存在するならば，v を通る閉路が存在することを示せ.

以下，f は D のフローで，すべての頂点 v に対して $f(v) > 0$ が成り立っているとする．さらに，

$$V_1 = \{v \in V : d^+(v) \geq 2\},\ V_2 = \{v \in V : d^-(v) \geq 2\},\ V_3 = \{v \in V : (v, *) \cap V_2 \neq \emptyset\}$$

とおいたとき，どんな閉路も一度は $V_1 \cup V_2$ に属する頂点を通ると仮定する.

(3) $v \in V \setminus (V_1 \cup V_3)$ ならば，$f(v) = f(w)$ となる $w \in V_1 \cup V_3$ が存在することを示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V| + |V_1|$ が成り立つことを示せ.

(5) $\displaystyle\sum_{v \in V_2} d^-(v) \geq |V_2| + \frac{1}{2}|V_3|$ が成り立つことを示せ.

(6) $\mathbb{R}$ の部分集合 S を，$S = \{f(v) : v \in V\}$ と定義すると，$|S| \leq 3(|A| - |V|)$ が成り立つことを示せ．また，等号の成立する例を１つ示せ.