平成１８年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目I		受験番号	M

平成１８年　1月　２6日　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

１. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）	３　枚
解答用紙	３　枚
下書用紙	１　枚

２. 問題は全部で　３　問ある.

３. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

４. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.

５. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ.

[1] 実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$X_n = \{\, p(t) \mid p(t) \text{ は } t \text{ を変数とする } n \text{ 次以下の実係数多項式} \,\}$$

に関する次の問に答えよ.

(1) $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\,\}$ は X_n の基底であることを示せ.

(2) 次の多項式の組 $\{f_1, f_2\}$ 及び $\{g_1, g_2, g_3\}$ が張る X_n $(n \geq 2)$ の部分空間の次元をそれぞれ求めよ.

$$f_1(t) = 3t + 4, f_2(t) = 2t + 5,$$
$$g_1(t) = 2t^2 + t + 5, g_2(t) = t^2 + t + 2, g_3(t) = 3t^2 + 2t + 7$$

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$G(p) = p(\alpha)$ で線形写像 $G : X_n \to \mathbb{R}$ を定める．$\mathrm{Ker}\, G$ と $\mathrm{Im}\, G$ を求めよ.

以下，$l+1$ 個の実数 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ に対し，$T : X_n \to \mathbb{R}^{l+1}$ を $T(p) = (p(\alpha_0), p(\alpha_1), \ldots, p(\alpha_l))$ で定める.

(4) T が線形同型写像であるための $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ に対する必要十分条件を求めよ.

(5) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元を求めよ.

[2] 関数 $f(x,y) = \exp\left(-\left(x - \dfrac{y}{x}\right)^2\right) \quad (x > 0, y \geq 0)$ に対し，次の問いに答えよ.

(1) $X \geq 0$ のとき $e^X \geq 1 + X$ を示せ.

(2) f の y に関する偏導関数 f_y を求めよ.

(3) $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y > 0 \,\}$ とおく．広義重積分 $\displaystyle\iint_D x(y - x^2) f(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(4) $N > 0$ に対し，$g_N(y) = \displaystyle\int_0^N f_y(x,y)\,dx$ とおく.
$N \to \infty$ のとき $g_N(y)$ は $y > 0$ で広義一様収束することを示せ.

(5) $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ とおく．$\dfrac{dF}{dy}$ を求めよ.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

[3] 以下では S を xy 平面上の単位閉正方形

$$S := [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$$

とし，T をその内部

$$T := (0,1) \times (0,1) = \{(x,y) \mid 0 < x, y < 1\}$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $g : T \to \mathbb{R}$ を

$$g(x,y) := \left(x - \frac{1}{2}\right)/y$$

で定義する．g が連続かどうか判定せよ．

(2) 上の g は，S 上の連続関数に拡張できるかどうか判定せよ．

(3) 次の命題は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

上に有界な任意の連続写像

$$f : T \to \mathbb{R}$$

に対し，$F : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) = \sup_{y \in (0,1)} \{f(x,y)\}$$

で定義すると，F は連続関数である．

(4) 次の命題は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

任意の連続写像

$$f : S \to \mathbb{R}$$

に対し，$F : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) = \sup_{y \in [0,1]} \{f(x,y)\}$$

で定義すると，F は連続関数である．