平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

選択問題：次の［4］～［12］の９問中の２問を選んで解答せよ.

[4]

G を群とする．以下の問に答えよ．

(1) 集合 $A(G)$ を

$$A(G) = \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ は全単射 群準同型写像}\}$$

で定義する．$A(G)$ の任意の元に，写像の合成に関する逆元が存在することを示せ．
（$A(G)$ は写像の合成により群となる．群 G の自己同型群という.）

(2) $g \in G$ を一つ固定したとき，写像 $\varphi_g : G \to G$ を

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}$$

と定めると，φ_g は群同型写像になることを証明せよ．

(3) 写像 $\Phi : G \to A(G)$ を $\Phi(g) = \varphi_g$ と定める．このとき，Φ は群の準同型になることを証明せよ．

(4) Φ の核が G の中心と一致すること，すなわち

$$\mathrm{Ker}\Phi = \{g \in G \mid g \text{ は } G \text{ の任意の元と可換}\}$$

が成立することを示せ．

(5) Φ の像を $I(G)$ で表す．$I(G)$ は $A(G)$ の正規部分群になることを証明せよ．

以下の問では，n を 3 以上の整数，G を n 次の二面体群

$$G = \left\langle \sigma, \tau \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma^n = \tau^2 = 1 \\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \end{array} \right\rangle$$

とする．ただし，G の単位元を 1 で表す．

(6) H を σ で生成される G の部分群とする．G の元 η が $\eta \notin H$ ならば

$$\eta\sigma\eta = \sigma^{-1}$$

を満たすことを証明せよ．

(7) ξ を位数がちょうど n の G の元，η を H に属さない G の元とする．このとき，$f(\sigma) = \xi, f(\tau) = \eta$ を満たす群の同型 $f : G \to G$ が存在することを証明せよ．

(8) $A(G)/I(G)$ の位数を求めよ．

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[5]　k を体とし，2 変数多項式環 $R = k[x, y]$ と 1 変数多項式環 $S = k[t]$ を考える．
環の準同型 $\varphi : R \to S$ を $g(x, y) \mapsto g(t^2, t^3)$ で定義する．

(1) $a \in k$ に対して，S の部分集合 I_a を

$$I_a = \{f(t) \in S \mid f(a) = 0\}$$

で定義する．このとき，I_a は S のイデアルであることを証明せよ．

(2) $I \subset S$ がイデアルであるとき，$\varphi^{-1}(I)$ が R のイデアルであることを証明せよ．
さらに，$I \subset S$ が素イデアルなら，$\varphi^{-1}(I)$ も R の素イデアルであることを証明せよ．

(3) $\varphi(x^3 - y^2)$ を求めよ．

(4) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を求めよ．

(5) 環準同型定理を述べよ．それを φ に対して適用することで得られる環の同型を記述せよ．

(6) S のイデアル I で，I 自身は素イデアルでないのに $\varphi^{-1}(I)$ が素イデアルになるようなものをすべて求めよ．

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[６]　以下，可微分多様体と言ったら C^∞-級可微分多様体を意味する．

(1) 可微分多様体の定義を述べ, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ が可微分多様体であることを定義に従って示せ.

(2) 可微分多様体上で定義された関数が C^∞-級関数であることの定義を述べ, 次の関数が C^∞-級であることを示せ.

$$p : S^1 \ni (x,y) \mapsto y \in \mathbb{R}$$

(3) 可微分多様体から可微分多様体への連続写像が，C^∞-級写像であることの定義を述べよ．また，C^∞-級写像の合成写像は C^∞-級写像となることを示せ.

(4) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし, F の S^1 への制限を f とする. このとき, f は C^∞-級写像であることを示せ.

(5) r を正の実数とし，$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ とおく. 曲面 M の第１基本形式と第２基本形式を求めよ.

(6) (5) の曲面 M のガウス曲率と平均曲率を求めよ.

[７]　以下の (A) の (i)–(ii) および (B) の (i)–(vi) に答えよ.

(A) $\mathbb{R}^2$ 上の３つの図形

$$\begin{aligned}
X &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 = 1\} \\
Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-2)^2 + y^2 = 1\} \\
Z &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0, -1 \le y \le 1\}
\end{aligned}$$

について，次に答えよ.

(i) X と Y は同相でもホモトピー同値でもない．その理由を述べよ.

(ii) Y と Z はホモトピー同値であるが同相ではない．その理由を述べよ.

(B) 長方形 $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ の左右の対辺を同じ向きに貼り合わせて（つまり $(0,y)$ と $(1,y)$ を同一視して）得られる図形を A で表し，左右の対辺を逆向きに貼り合わせて（つまり $(0,y)$ と $(1,-y)$ を同一視して）得られる図形を M で表すとき，次に答えよ.

(i) A と M は同相ではない．その理由を述べよ.

(ii) A と M はホモトピー同値である．その理由を述べよ.

(iii) A の１次元ホモロジー群もしくは基本群を求めよ．また A のオイラー標数を求めよ.

(iv) $f : L \to L$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, y) & (0 \le x < 1/2 \text{ のとき}) \\ (2x-1, -y) & (1/2 \le x \le 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とするとき，$q \circ f = h \circ p$ となるような写像 $h : A \to M$ が存在することを示せ．ここで，$p : L \to A$ と $q : L \to M$ は商写像（等化写像）である.

(v) 被覆空間と被覆写像の定義を述べよ．また，(iv) における写像 h が被覆写像であることを示せ.

(vi) M から A への被覆写像が存在しないことを示せ.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[8]

(1) 複素平面上の有理型関数 $f(z)$ がすべての実数 x に対して

$$f(x)(x^2+1)^2 = e^{ix}$$

を満たすとする．このとき，複素平面上で

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(z)$ のすべての極およびその留数を求めよ.

(3) 上半平面 $\mathrm{Im} z > 0$ および下半平面 $\mathrm{Im} z < 0$ において $\cos z$ は有界でないことを示せ.

(4) 次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$$

[9] f は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測な実数値関数で，任意の有界区間上でルベーグ積分可能であるとする．このとき次の問に答えよ.

(1) 以下の条件 $(*)$ を満たす関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ.

$(*)$　　$a < b$ なる任意の $a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx$ が成り立つ.

(2) 前問 (1) の条件 $(*)$ を満たす関数 F は連続であることを示せ.

(3) 関数 f が $\mathbb{R}$ 上でルベーグ積分可能であるならば，条件 $(*)$ を満たす関数 F は $\mathbb{R}$ 上で有界となることを示せ.

(4) 関数 f が非負値であるとき，条件 $(*)$ を満たす関数 F が $\mathbb{R}$ 上で有界ならば，f はルベーグ積分可能となることを示せ.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目(午後)

［１０］　λ は正定数とし，確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立同分布で，その共通の分布は $(0,\lambda)$ 上の一様分布であるとする．$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ とおくとき次の問に答えよ．

(1) Y_n の分布関数と確率密度関数を求めよ．

(2) Y_n の特性関数を $\varphi_n(t) = E[\exp(itY_n)]$ とすると

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{n}{n+k} \lambda^k$$

が成り立つことを示せ．

(3) $n \to \infty$ のとき，Y_n は λ に確率収束することを示せ．

(4) $Z_n = n(\lambda - Y_n)$ とおく．$n \to \infty$ のとき，Z_n は，以下で与えられる $f(z,\lambda)$ を確率密度関数にもつ確率変数に分布収束することを示せ．

$$f(z,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp(-\dfrac{z}{\lambda}) & (z > 0) \\ \\ 0 & (z \le 0) \end{cases}$$

［１１］　α, β を $\alpha > \beta > 0$ なる定数，$f(t)$ を $[0,\ \infty)$ 上の連続関数として次の２つの初期値問題

$$(*) \qquad z' + \beta z = f(t), \quad z(0) = 0,$$
$$(**) \qquad x'' + (\alpha+\beta)x' + \alpha\beta x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) 初期値問題 $(*)$ の解 z を求めよ．

(2) 初期値問題 $(**)$ の解 x に対して $w(t) = x'(t) + \alpha x(t)$ とおくと，w は初期値問題 $(*)$ の解であることを示せ．

(3) 初期値問題 $(**)$ の解 x を求めよ．

(4) $f(t)$ が $[0,\ \infty)$ 上で有界ならば，初期値問題 $(**)$ の解 x も $[0,\ \infty)$ 上で有界となることを示せ．

(5) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ ならば，初期値問題 $(**)$ の解 x は $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ を満たすことを示せ．

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

［１２］　本問では，多重辺，ループを持たない向きのないグラフを考える．グラフ G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ で表し，G の頂点 x に接続している辺の数を x の次数といい，$d_G(x)$ で表す．連結で閉路のないグラフを木という．木の次数 1 の頂点を葉といい，木 T の葉の全体を $L(T)$ で表す．

(1) T が 2 頂点以上の木ならば，

$$|L(T)| = 2 + \sum_{\substack{x \in V(T) \\ d_T(x) \geq 3}} (d_T(x) - 2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) グラフ G の部分グラフ T は，$V(T) = V(G)$ かつ T が木のとき，G の全域木という．G が連結グラフで，G の頂点 x が $d_G(x) \geq 2$ を満たしていれば，G には x が葉でない全域木が存在することを示せ．

(3) G は 4 点以上のグラフで，任意の頂点 z に対し，$G - z$ が連結であるとする．

(3-1) xy が G の辺ならば，G の全域木 T で $\{x, y\} \cap L(T) = \phi$ （空集合）を満たすものが存在することを示せ．

(3-2) x と y が辺で結ばれていなければ，G の全域木 T で $\{x, y\} \cap L(T) = \phi$ を満たすものが存在しないことがある．このような例を１つ示せ．

(4) G が頂点数 n の連結グラフで，G のすべての頂点の次数が $\dfrac{n-1}{3}$ 以上とする．

(4-1) G には $|V(P)| \geq \dfrac{2(n-1)}{3} + 1$ を満たす道 P が存在することを示せ．

(4-2) G にはすべての頂点の次数が 3 以下の全域木が存在することを示せ．