平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] $a, b, c \in \mathbb{R}$ を実定数とする．三つの実数 e, f, g に対し，初期値を $x_0 = e, x_1 = f, x_2 = g$ とし漸化式

$$(*) \quad x_{n+3} = -ax_{n+2} - bx_{n+1} - cx_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

で定義される数列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ を考える.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}$ とおく． $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ を示せ.

(2) 上の行列 A が正則行列となる必要十分条件を，a, b, c を用いて表せ.

(3) A が正則行列とならないとき，A の階数を求めよ.

(4) A が正則行列であるとする．漸化式 $(*)$ の解数列 (x_n) が途中から全て０になる，すなわちある n_0 が存在して $0 = x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \cdots$ となるならば，初期値 (e, f, g) は $(0, 0, 0)$ であることを示せ.

(5) A の固有多項式を求めよ.

(6) ある初期値 (e, f, g) に対し漸化式 $(*)$ の解数列 (x_n) がちょうど周期 3 で循環したとする．すなわち

$$x_{n+3} = x_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立ち，かつ $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots$ ではないとする．このとき，A^3 は固有値 1 を持つことを示せ.

(7) (6) の条件が満たされるとき，$x_n = (-c)^n$ も $(*)$ の解数列であることを示せ.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[2] 以下，通常通り $\log$ は自然対数を，e は自然対数の底を表すものとする.

(1) $u > 0$ において，$\log(1+u) < u$ であることを示せ.

(2) $x > 0$ において，$(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ が単調減少関数であることを示せ.

(3) $x > 0$ において，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ は単調減少関数であることを示せ.

(4) $x > 0$ において，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ は単調増加関数であることを示せ.

(5) $x > 0$ において，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ が成立することを示せ.

（数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が e に収束することは用いても良い.）

(6) $x > 0$ において，$1 < \dfrac{e^x}{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}} < e$ が成立することを示せ.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}}$ を求めよ.

平成１８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[3] $\mathcal{K}$ を，平面 $\mathbb{R}^2$ 内の空でないコンパクト集合（すなわち有界閉集合）の全体とする．

(1) 次の集合のうちで，$\mathbb{R}^2$ の開集合であるものを全てあげよ．また，$\mathcal{K}$ に属するものを全てあげよ．(ごく簡単な説明を沿えよ．)

$$\text{(a) } \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \quad \text{(b) } \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \quad \text{(c) } \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\}$$

以下，空でない部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$，点 $x \in \mathbb{R}^2$，空でない部分集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{a\in A} |x-a| \\ \sigma(B,A) &= \sup_{b\in B} d(b,A) \end{aligned}$$

と定義する．

(2) (1) の (a) の集合を A, (b) の集合を B としたとき，$d(0,A)$ および $\sigma(B,A)$ を求めよ．

(3) $A \in \mathcal{K}$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，ある $a \in A$ が存在して

$$d(x,A) = |x-a|$$

が成立することを示せ．

(4) $A \in \mathcal{K}$ を固定するとき，$d(x,A)$ は x の関数として $\mathbb{R}^2$ 上連続であることを示せ．

(5) $A, B \in \mathcal{K}$ に対し，$\sigma(B,A)=0$ となる必要十分条件が $B \subset A$ であることを示せ．

(6) $A, B \in \mathcal{K}$ に対して

$$\delta(A,B) := \max\{\sigma(A,B),\ \sigma(B,A)\}$$

とおく．δ が $\mathcal{K}$ 上の距離となるために満たさなくてはならない公理を書け．

(7) (6) の δ が距離になることを証明せよ．