平成１９年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目I

受験番号	M

平成１９年　1月　２５日　　　９：００　～　１２：００

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙（表紙を含む.）	３　枚
解答用紙	３　枚
下書用紙	１　枚

2. 問題は全部で　３　問ある.
3. 解答は問題毎に必ず一枚ずつ別々の用紙を用い，それぞれの解答用紙に受験番号を記入し解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.
4. 試験問題の表紙，解答用紙及び下書用紙の全てに受験番号を記入せよ.
5. 試験終了時には，全ての用紙を提出すること.

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 以下の問 (A) および (B) に答えよ.

(A) 以下にあげる $\mathbb{R}^2$ の部分集合 U, V, W について $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間であるか否かを理由付きで判定せよ.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \right\}.$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \right\}.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1 \right\}.$$

(B) a を実数とする. ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$ について以下の問に答えよ.

(1) 4 次正方行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ で与えるとき, その行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立になるための条件を a を用いて表せ.

(3) 行列 A の固有値を求めよ.

(4) 前問 (3) で求めた固有値に対する固有空間とその次元を求めよ.

[2] 以下の問 (A) および (B) に答えよ.

(A) 数列 $\{a_n\}$ に関する以下の問に答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ が数 a に収束するということの定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ が成り立つことを示せ.

(B) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = (x+y+1)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ で定義するとき以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} = 0$ を示せ.

(2) f の偏導関数 f_x および f_y を求めよ.

(3) f は最大値, 最小値をとることを示し, 最大値, 最小値とそれらを与える点を求めよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$ が収束することを示し, その値を求めよ.

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科第二次入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 I

[3] X を区間 $[0,1]$ で定義された連続関数全体とする．d_0, d_1 : $X \times X \to [0,+\infty)$ を $x, y \in X$ に対して

$$d_0(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|, \quad d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

で定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) d_0 および d_1 は X 上の距離関数となることを示せ．

(2) X の点列 $\{x_n\}$ が，距離空間 (X, d_0) において $x \in X$ に収束するならば，距離空間 (X, d_1) においても x に収束することを示せ．

(3) 各正整数 n に対して $y_n \in X$ を

$$y_n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & (n^{-1} \le t \le 1 \text{ のとき}), \\ n^{\frac{1}{2}} & (0 \le t \le n^{-1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，点列 $\{y_n\}$ は，距離空間 (X, d_1) において基本列 (コーシー列ともいう) となることを示せ．

(4) 前問 (3) の点列 $\{y_n\}$ は距離空間 (X, d_1) においては収束列ではないことを示せ．

(5) $S = \{x \in X \mid$ 任意の $t \in [0,1]$ に対して $0 < x(t) < 1\}$ は距離空間 (X, d_0) においては開集合であるが，距離空間 (X, d_1) においては開集合ではないことを示せ．

(6) 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$x_{a,b}(t) = at + b\ (t \in [0,1])$ で $x_{a,b} \in X$ を定義する．このとき $R = \{x_{a,b} \mid |a| \le 1,\ |b| \le 1\}$ は距離空間 (X, d_0) においてコンパクト集合となることを示せ．