平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専門科目(午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] G を群とする．以下の問に答えよ.

(1) H を G の部分群とする．このとき，$a,\ b \in H, x \in G$ が $a \cdot x = b$ を満たせば，$x \in H$ であることを示せ.

(2) H を G の部分群とする．G における二項関係 $\sim$ を,「$a \sim b$ とはある $h \in H$ により $a \cdot h = b$ となること」と定義する．この二項関係が同値関係であることを示せ.

(3) 上の (2) において，H が d 個の元からなる有限部分群とする．任意の $a \in G$ に対して，a と同値な元の集合（a の属する同値類という）を $[a]$ で表したとき，$[a]$ の元の数も d 個であることを示せ.

(4) 上の (3) において，G が N 個の元からなる有限群であるとすると，N は d の倍数であることを (3) の結果に基づいて証明せよ.

(5) S_5 を，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ からそれ自身への全単射のなす群，すなわち５次対称群とする．S_5 の元の数を求めよ.

(6) H を S_5 の部分群とし，H の元の数は 30 以上とする．S_5 の元 a に対し，(3) で定義された記号を用いて同値類 $[e],\ [a],\ [a^2],\ [a^3],\ [a^4]$ を考えると，これらのうちどれか少なくとも二つは一致することを示せ．ここで，e は S_5 の単位元を表わす.

(7) H の元の数がちょうど 30 ということはないことを示せ.

(8) L を有理数係数５変数有理式体 $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ とし，M を対称有理式が成す部分体とする．L と M の中間体で，M 上の４次拡大となる体は存在しないことを示せ.

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[5]　τ を実数でない複素数とし，Λ を 1 と τ の整数係数一次結合の全体，すなわち

$$\Lambda = \{m + n\tau \in \mathbb{C} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とする．ただし，$\mathbb{C}$ は複素数の集合，$\mathbb{Z}$ は整数の集合とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　複素数 w に対し、集合 $w\Lambda$ を

$$w\Lambda = \{w\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$$

で定義する．R を $\mathbb{C}$ の部分集合

$$R = \{w \in \mathbb{C} \,|\, w\Lambda \subset \Lambda\}$$

とすると，R は $\mathbb{C}$ の部分環になることを示せ.

(2)　$\mathbb{Z} \subset R \subset \Lambda$ を示せ.

(3)　$R \neq \mathbb{Z}$ となるための τ の必要十分条件を求めよ.

(4)　$\tau = \dfrac{3}{2}i$　(i は虚数単位) のときの R を求めよ.

(5)　$\tau = i$ とする．$\mathbb{C}$ 上の $1 + i$ 倍写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = (1 + i)z$ は，加法群の準同型

$$\overline{f} : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$$

を誘導することを証明せよ.

(6)　$\overline{f}$ の像を求めよ.

(7)　$\overline{f}$ の核を求めよ.

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[6] a, b は $a > b > 0$ をみたす定数とする．写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v) \quad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

で定義し，$M = f(\mathbb{R}^2)$ とおく．また $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $p(x,y,z) = (x,y)$ で定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) $p \circ f$ は，はめ込みでないことを示せ．つまり $p \circ f$ のヤコビ行列は $\mathbb{R}^2$ のある点で階数が 2 より小さくなることを示せ．

(2) f は，はめ込みであるが，埋め込みでないことを示せ．つまり f のヤコビ行列は $\mathbb{R}^2$ のすべての点で階数が 2 であるが，f は単射でないことを示せ．

(3) $f(u,v) \in M$ における $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 M の単位法線ベクトルを求めよ．

(4) M はコンパクトな 2 次元可微分多様体になることを示せ．

(5) v を固定したまま u が動いたとき，点 $f(u,v)$ が M 上に描く曲線を u 曲線という．同様に，u を固定したまま v が動いたときにできる曲線を v 曲線という．このとき，M のすべての点において，u 曲線の接ベクトルと v 曲線の接ベクトルは直交することを示せ．

(6) M のガウス曲率 K を u, v の式で表せ．

(7) $K > 0$ となるのは M のどの部分か．

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[7]　次の問 (A) (1)-(4) および (B) (1)-(5) に答えよ．

(A)　$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ をそれぞれ１次元，２次元，３次元ユークリッド空間とする．

(1) １点と $\mathbb{R}$ はホモトピー同値であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相であることを示せ．ただし，$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする．

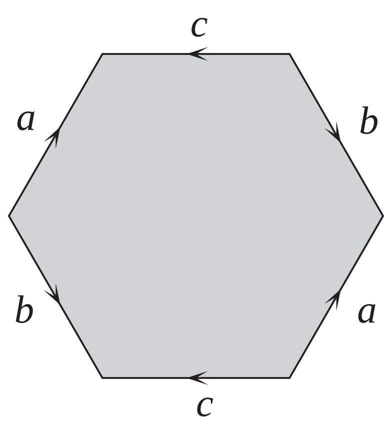
(3) $\mathbb{R}^3$ における開球 B と 線分 I を次で定義する．

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \quad I = \{(0,0,z) \mid -1 \leq z \leq 1\}.$$

適当に円板の埋め込み D を選べば，$B - ((I \cup D) \cap B)$ が $\mathbb{R}^3$ と同相になるようにできることを示せ．

(4) $B - (I \cap B)$ の基本群もしくは１次元ホモロジー群を求めよ．

(B)　内部も込めた正６角形の３つの対辺を図のように同一視する．



(1) ６頂点が１点に同一視されるか否かを判定せよ．

(2) できあがった図形は，２次元位相多様体であること，つまり各点の近傍として開円板と同相なものがとれることを示せ．

(3) できあがった図形のオイラー数を求めよ．

(4) できあがった図形は球面と同相かどうかを判定せよ．

(5) 内部も込めた正６角形の６辺を２辺ずつ同一視してできる図形を同相で分類せよ．

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[8]　$0 < r < 1$ とし，$C(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ は複素平面内の原点を中心とする半径 r の円周を表すものとする．また，以下において複素積分の積分路は，円周 $C(r)$ を正の向き（反時計周り）に一周するものを考える．

(1)　$I = \displaystyle\int_{C(r)} \frac{1}{z(1-z^2)}\,dz$　と　$J = \displaystyle\int_{C(r)} \frac{1}{z^2(1-z^2)}\,dz$ の値を求めよ．

次に，$B_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ 上の正則関数 $f(z)$ に対して，積分

$$F(r) = \int_{C(r)} f(z)\,dz$$
$$G(r) = \int_{C(r)} |f(z)|\,|dz|$$

を考える．

(2)　$z = re^{i\theta}$ とおいて，$F(r), G(r)$ を θ に関する定積分で表せ．

(3)　$F(r)$ は，$0 < r < 1$ のとき，一定であることを示せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ のとき，$f(z)$ は原点においても正則な関数に拡張されるかどうか調べよ．

(5)　$\displaystyle\lim_{r\to 0} G(r) = 0$ のとき，$f(z)$ は原点においても正則な関数に拡張されることを示せ．

[9]　μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし，区間 $I \subset \mathbb{R}$ と $1 \le p < \infty$ に対し，$L^p(I)$ は I 上の Lebesgue 可測関数 f で μ に関してほとんどいたるところで実数値をとり，かつ $\|f\|_{L^p(I)} < \infty$ をみたすものの全体を表すとする．ただし，$\|f\|_{L^p(I)} = \left\{ \displaystyle\int_I |f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}}$ である．以下の問 (A) および (B) に答えよ．

(A)　次の命題 (i)〜(iv) のうち，正しいものについては証明を与え，そうでないものについては反例を挙げよ．

(i)　$L^2((0,1)) \subset L^1((0,1))$,　　(ii)　$L^1((0,1)) \subset L^2((0,1))$,

(iii)　$L^2((1,\infty)) \subset L^1((1,\infty))$,　　(iv)　$L^1((1,\infty)) \subset L^2((1,\infty))$.

(B)　$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 g で次の性質をもつものを考える．

「任意の $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $g\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $\sup\{\, \|g\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \,\} < \infty$ が成立する.」

このとき，以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) ある $M > 0$ が存在して，すべての $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\left| \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx \right| \le M\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$ となることを示せ．

(2) $N, l > 0$ に対して $\Omega_{N,l} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| \ge N, |x| \le l \,\}$ とおく．$\mu(\Omega_{N,l}) \le M^2/N^2$ となることを示せ．

(3) $\Omega_\infty = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| = \infty \,\}$ は零集合であることを示せ．

(4) $g \in L^2(\mathbb{R})$ を示せ．

平成１９年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[10] $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各 n に対して $0 \leq p_n \leq 1$ をみたす数列とし，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，各 n に対して $P(X_n = 1) = p_n$，$P(X_n = 0) = 1 - p_n$ をみたすものを考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ の n 部分和 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ についてその期待値 E_n と分散 V_n を 数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて表せ．

(2) S_n の特性関数 $\varphi_n(t)$ を数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ a.s. が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ ならば，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，$n \to \infty$ のとき $S_n(\omega)$ が収束することを示せ．

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ ならば，$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{S_n}{E_n}$ は定数 1 に確率収束することを示せ．

[11] 正の実数 ω をパラメータにもつ微分方程式

$$(*) \qquad x''(t) + \omega^2 x(t) = \sin t$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\omega \neq 1$ とするとき，$x_0(t) = A \sin t$（ただし A は実定数）の形の $(*)$ の特殊解を求めよ．

(2) $\omega \neq 1$ のとき，$(*)$ の一般解を求めよ．

(3) $\omega = 1$ のとき，$(*)$ の一般解を求めよ．

(4) 実定数 a, b に対して，初期条件 $x(0) = a$，$x'(0) = b$ をみたす $(*)$ の解を $x(\omega, a, b; t)$ で表す．このとき，$x(\omega, a, b; t)$ が t に関して有界となるようなパラメータ ω の条件を求めよ．

(5) a, b, t を固定するとき $x(\omega, a, b; t)$ は パラメータ ω に関して連続であることを示せ．