

平成 19 年度 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数	学 専 攻	専門科目 (午前)
---	-------	-----------

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] $M(3, \mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体のなす実線形空間とし, $V = \{X \in M(3, \mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$ とする. ただし, 行列 X に対して tX は X の転置行列を表す.

(1) V は $M(3, \mathbb{R})$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は V の基底であることを示せ.

(3) $A \in M(3, \mathbb{R})$ とする. $X \in V$ に対して, $f_A(X) = {}^tAXA$ と定めるとき, f_A は V から V への線形写像であることを示せ.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, V の基底 $\{X_1, X_2, X_3\}$ に関する f_A の行列表示を求めよ. ただし, a, b は実定数とする.

(5) (4) の A に対して, f_A の像 $\text{Im}f_A$ の次元 $\dim \text{Im}f_A$ を求めよ.

(6) (4) の A に対して, f_A の像 $\text{Im}f_A$ と核 $\text{Ker}f_A$ の基底をそれぞれ 1 組求めよ.

[2] 以下の各問に答えよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{(e^x-1)} = 1$ を示せ.

(2) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義する. このとき, $f(x)$ は微分可能であるが, 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを示せ.

(3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 次の (a), (b) をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在したと仮定する.

(a) 各 $n \geq 1$ に対して $a_n \geq 0$ であり, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(b) 各 $n \geq 1$ と各 $x \in [0, 1]$ に対して $|f_n(x)| \leq a_n$ が成り立つ.

このとき, 各 $x \in [0, 1]$ に対して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束し, 極限関数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $[0, 1]$ において連続であることを証明せよ.

(4) $p > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ とする. このとき, 広義積分 $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその値を求めよ.

平成 19 年度 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数	学 専 攻	専門科目 (午前)
---	-------	-----------

[3] X を空でない集合とし, 距離関数 $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が与えられているとする. また, 距離空間 (X, d) の開集合系を $\mathcal{O}_d$ で表す. このとき以下の問に答えよ.

- (1) $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が距離関数であることの定義を述べよ.
- (2) 任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対して $\bar{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ は距離空間 (X, d) の閉集合であることを示せ.
- (3) $\mathcal{O}_c = \{G \subset X \mid G \text{ の補集合は有限集合} \} \cup \{\emptyset\}$ とおく. このとき, 集合族 $\mathcal{O}_c$ は開集合系の公理をみたすことを示せ.
- (4) $\mathcal{O}_c = \mathcal{O}_d$ が成り立つとする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して $r > 0$ を十分小さく選べば $\bar{B}(x, r) = \{x\}$ となることを示せ.
- (5) $\mathcal{O}_c = \mathcal{O}_d$ が成り立つならば X は有限集合であることを示せ.
- (6) X が非可算集合であるとし, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O}_c)$ から通常距離位相を備えた数直線 $\mathbb{R}$ への連続写像とする. このとき, 整数 n が存在して $f^{-1}([n, n+1]) = X$ となることを示せ.
- (7) (6) の f は定数関数となることを示せ.