平成２０年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] n を自然数とする．x を変数とする実数係数の n 次以下の多項式全体がなす実線形空間を

$$V_n = \{f(x) \mid f(x) \text{ は } n \text{ 次以下の実数係数多項式 }\}$$

で表し，W_n を定数項が 0 である多項式がなす V_n の部分集合とする．

α を実数とする．以下の問に答えよ．

(1) W_n は V_n の線形部分空間であることを示せ．

(2) $f(x) \in V_n$ に対して，

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

が多項式であることを証明せよ．

(3) $f(x) \in V_n$ に対し，$F(f(x))$ を

$$F(f(x)) = x\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

で定める．F が V_n から V_n への線形写像であることを示せ．

以下では，$n = 3$ とする．

(4) $F(x^3)$ を求めよ．

(5) V_3 の基底として $\{x^3, x^2, x, 1\}$ を取ったときの，F の表現行列 A を求めよ．

(6) A が正則でないことを示せ．

(7) A のジョルダン標準形を求めよ.（基底変換行列は求めなくて良い.）

(8) F を W_3 に制限したものを G とするとき，

$$G = (I - \alpha N)^{-1}$$

を満たすようなべき零写像 $N : W_3 \to W_3$ が存在することを示せ．ここで，I は W_3 上の恒等変換を表す．

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[**2**] 実平面 $\mathbb{R}^2$ 上の非負関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)(1-x^2-y^2) & ((x,y)\in D \text{ のとき})\\ 0 & ((x,y)\notin D \text{ のとき})\end{cases}$$

により定める．ただし，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2<1\}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y)$ が点 (x_0,y_0) において偏微分可能であることの定義を述べよ．

(2) 領域 D において関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(3) 点 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $f(x,y)$ は偏微分可能かどうか調べよ．

(4) 関数 $h(x,y)=f(x,y)^2$ は $\mathbb{R}^2$ において C^1 級（連続的微分可能）であることを示せ．

(5) $f(x,y)$ を極座標を用いて表し，$\mathbb{R}^2$ における最大値および最大値を取る点全体のなす集合を求めよ．

(6) p を実定数とする．極座標を利用して，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)^p dxdy$ を１変数の積分に書き換えよ．

(7) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)^p dxdy$ が収束するような実数 p の範囲を求めよ．

(8) 自然数 n に対して $f_n(x,y)=n^2f(nx,ny)$ とおく．重積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)dxdy$ の値を計算せよ．

(9) 前問で定義された $\mathbb{R}^2$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $n\to\infty$ のとき，各点ごとには 0 に収束することを示せ．さらに，この収束は $\mathbb{R}^2$ において一様でないことを示せ．

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[3] I_0 を閉区間 $[0,1]$ とする．I_0 を 3 等分して中央の開区間を除いて得られる集合を I_1 とする．すなわち，

$$I_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 3/3]$$

次に，I_2 を I_1 に現れる 2 つの区間それぞれを 3 等分して中央の開区間を除いて得られる集合とする．すなわち，

$$I_2 = ([0, 1/9] \cup [2/9, 3/9]) \cup ([6/9, 7/9] \cup [8/9, 9/9])$$

帰納的に I_{n+1} を I_n に現れる 2^n 個の区間それぞれを 3 等分して中央の開区間を除いて得られる集合とする．

次の問に答えよ．

(1) 閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ は実数直線 $\mathbb{R}$ の閉部分集合であることを示せ．

(2) $n > 0$ に対し I_n が閉部分集合であるかどうか，理由を付して答えよ．

(3) $I_\infty = \bigcap_{n \geq 0} I_n$ が閉部分集合であるかどうか，理由を付して答えよ．

(4) 位相空間 X の部分集合 A が連結であることの定義を述べよ．
(位相空間の定義を知らないときは，X は距離空間としてよい．)

(5) I_0 が実数直線 $\mathbb{R}$ の連結部分集合であることを示せ．

(6) $n > 0$ に対し I_n が連結であるかどうか，理由を付して答えよ．

(7) $x \in I_\infty$ に対し，x を含む I_∞ の連結部分集合は $\{x\}$ に限ることを示せ．

(8) I_∞ 上の連続関数は最大値を持つことを示せ．