平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] 以下の問に答えよ.

(1) 群の準同型の定義を述べよ．また，アーベル群の定義を述べよ．ただし，群の概念は既知としてよい.

(2) G を群とする．正の整数 n に対して，写像 $\varphi_n : G \to G$ を

$$\varphi_n(g) = g^n$$

により定義する．ただし，元 g の n 個の積 $\overbrace{gg\cdots g}^{n\,\text{個}}$ を簡単に g^n と表し， G の単位元は e と表すものとする．φ_2 が準同型ならば，G はアーベル群であることを示せ.

(3) G がアーベル群ならば，任意の正の整数 n に対して φ_n は準同型であることを示せ.

(4) G が位数 N の有限群とすると，$m \equiv n \pmod N$ を満たす正の整数 m, n に対し $\varphi_m = \varphi_n$ が成り立つことを示せ.

(5) G が位数 8 の群ならば，φ_4 は準同型であることを証明せよ.

(6) 任意の位数 8 の群に対して，φ_n が準同型になるような正の整数 n の値をすべて求めよ.

[5] a を整数，α と β をそれぞれ $\alpha^2 + 4a\alpha + 1 = 0$ と $\beta^2 = \alpha$ を満たす複素数とし，$K = \mathbb{Q}(\alpha)$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に α を添加した体，$L = K(\beta)$ を体 K に β を添加した体とする．以下の問に答えよ.

(1) α は有理数でないことを証明せよ.

(2) K の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(3) β の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．また，L の K 上の拡大次数を求めよ.

(4) β^{-1} が β の $\mathbb{Q}$ 上の共役元であることを示せ.

(5) L が $\mathbb{Q}$ のガロア拡大体であることを証明せよ.

(6) ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型になることを示せ.

(7) L の部分体をすべて求めよ.

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[6] 2 次元球面

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

および $p_\pm = (0,0,\pm 1)$, $U_\pm = S^2 - \{p_\pm\}$ に関して, 次の問に答えよ.

(1) $\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2$ を, $p_\pm$ を中心とする立体射影とする．すなわち, $u=(u_1,u_2,u_3) \in U_\pm$ に対して, u と $p_\pm$ を通る直線と xy-平面との交点を $\varphi_\pm(u)$ と定義する．このとき，$\varphi_+(u)$ と $\varphi_-(u)$ を u_1,u_2,u_3 を用いて表せ.

(2) 立体射影 $\varphi_\pm$ を用いて S^2 の座標近傍系を与えることにより, S^2 が C^∞ 級多様体となることを証明せよ.

(3) $f : S^2 \to S^2$ を, z 軸のまわりに角度 θ だけ回転させる写像とする．f が C^∞ 級写像であることを証明せよ.

(4) $\mathrm{Diff}(S^2)$ を S^2 から S^2 への C^∞ 級微分同相写像全体の成す群とする．$\mathrm{Diff}(S^2)$ が S^2 に推移的に作用することを説明せよ.

[7]　次の問 (A)(1)-(4) および (B)(1)-(4) に答えよ.

(A)　各整数 n に対して，単位円 $S^1=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への連続写像 $f_n(z)=z^n$ を考える.

(1) f_1 と f_0 はホモトピックであることを証明せよ.

(2) 基本群 $\pi_1(\mathbb{C}-\{0\})$ は無限巡回群 $\mathbb{Z}$ に同型である．その理由を述べよ.

(3) f_2 を S^1 から $\mathbb{C}-\{0\}$ への連続写像とみなすとき，f_2 が導く基本群の間の準同型写像 $(f_2)_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(\mathbb{C}-\{0\})$ の像を求めよ.

(4) f_2 と f_0 を S^1 から $\mathbb{C}-\{0\}$ への連続写像とみなすとき，f_2 と f_0 はホモトピックでないことを証明せよ.

(B)　多様体のホモロジー群に関する下記の問に答えよ.

(1) 円周 S^1 の単体分割または胞体分割を一つ与え，それを用いて S^1 のホモロジー群を求めよ.

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

(2) 連結な曲面（2 次元多様体）S と，その単体分割 K を考える．次の条件が満たされるとき，S は向き付け可能，そうでないとき向き付け不可能という．

- K の各 2 単体に向きを指定して次の条件を満たすようにできる．K の異なる二つの 2 単体 σ_1,σ_2 が 1 単体 τ を共有するなら σ_1 の向きと σ_2 の向きは同調している．すなわち，σ_1 の向きが導く τ の向きと σ_2 が導く τ の向きは逆になっている．

トーラスは向き付け可能であることを証明せよ．

(3) メビウスバンドは向き付け不可能であることを証明せよ．

(4) 境界のないコンパクトで連結な曲面 S が向き付け可能なら，$H_2(S)$ は $\mathbb{Z}$ と同型であることを証明せよ．

[8] $f(z) = \dfrac{z^3}{\cosh z}$ とおく．また，非負の整数 k に対して $I_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{\cosh x} dx$ とおく．ただし，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ である．以下の問に答えよ．

(1) f は全平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であることを示し，f の極をすべて求めよ．さらに，それぞれの極に対する位数と留数を求めよ．

(2) $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \ (x, y \in \mathbb{C})$ を示せ．ただし，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(3) 実数 $R > 0$ と正の整数 l に対して $\Gamma_{\pm R,l} = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = \pm R + iy, 0 \le y \le \pi l \}$ とおくとき，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{\pm R,l}} \frac{z^3}{\cosh z} dz = 0$$

が成り立つことを，$\Gamma_{+R,l}$ の場合に示せ．

(4) 実数 $R > 0$ と正の整数 l に対し，複素平面上の 4 点 $-R$, R, $R + i\pi l$, $-R + i\pi l$ を頂点とする長方形の周が作る閉曲線に反時計回りに向きを付けたものを $C_{R,l}$ で表す．$C_{R,l}$ に沿って関数 f を線積分することにより I_0 と I_2 に関する次の関係式を導け．

$$3I_2 - \pi^2 l^2 I_0 = \frac{(-1)^l \pi^3}{4l} \sum_{n=0}^{l-1} (-1)^n (2n+1)^3 \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

(5) I_0 と I_2 を求めよ．

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[9]　以下の問に答えよ．ただし，m は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし，n は正の整数とする．

(1)　積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, m(dx)$ の値を求めよ．

(2)　f は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 積分可能な関数で，各点で $0 \le f(x) < 1$ を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^n\, m(dx) = 0$$

を示せ．

(3)　$\mathbb{R}$ 上の非負値 Lebesgue 可測関数 f が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^n\, m(dx) = 0$ を満たすならば，Lebesgue 測度に関してほとんどいたるところ $f(x) < 1$ となっていることを示せ．

(4)　$\mathbb{R}$ 上の非負値 Lebesgue 積分可能関数 f に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^n\, m(dx)$ が正の有限値となるための条件を求めよ．

(5)　$+\infty$ を極限値として許容するならば，$\mathbb{R}$ 上の任意の非負値 Lebesgue 可測関数 f に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)^n\, m(dx)$ が存在することを示せ．

[10]　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立同分布で，平均 $E[X_1] = 0$, 分散 $V[X_1] = 1$ とする．α を実定数，$Y_0 = 0$ とし，確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次式によって定義する．

$$Y_n = \alpha Y_{n-1} + X_n, \quad Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1)　Y_n の平均，分散を，n, α を用いて表せ．

(2)　$\alpha = 1$ とする．$n \to \infty$ のときの Z_n の極限分布を求めよ．

(3)　$|\alpha| < 1$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は 0 に確率収束することを示せ．

(4)　$|\alpha| > 1$ とし，X_1 の分布は正規分布とする．このとき，任意の正の数 M に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n| \le M) = 0$$

となることを示せ．

(5)　$\alpha > 1$ とし，$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p \ (0 < p < 1)$ とする．このとき，任意の正の数 M に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le M) = 0$$

となることを示せ．

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[11] $a \in \mathbb{R}$ とし，$x(t)$ を次の初期値問題

$$\begin{cases} x''(t) + \left(1 - \dfrac{1}{t^2+1}\right) x(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ x(0) = a, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

の解とする．$r(t)$, $\theta(t)$ を $[0, \infty)$ 上の C^1 級関数とし，

$$x(t) = r(t)\sin(t + \theta(t)), \quad x'(t) = r(t)\cos(t + \theta(t))$$

とおく．ただし，$\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $r(t) > 0$ $(0 \leq t < \infty)$ のとき次を示せ．

(a) $r(t), \theta(t)$ は次を満たす．

$$\begin{aligned} \frac{r'(t)}{r(t)} &= \frac{1}{t^2+1}\sin(t+\theta(t))\cos(t+\theta(t)), \\ \theta'(t) &= -\frac{1}{t^2+1}\sin^2(t+\theta(t)). \end{aligned}$$

(b) $t \to \infty$ のとき，$r(t), \theta(t)$ は収束する．

(c) $ae^{-\pi/4} \leq \lim_{t\to\infty} r(t) \leq ae^{\pi/4}, \quad 0 \leq \lim_{t\to\infty} \theta(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $a \neq 0$ ならば，$r(t) \neq 0$ $(0 \leq t < \infty)$ が成り立つことを示せ．