平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ．

[1] $M(n,\mathbb{R})$ を n 次実正方行列全体のなす実線形空間とする．$A \in M(n,\mathbb{R})$ に対し，$\det A$，$\mathrm{tr}A$ はそれぞれ A の行列式，トレース（対角成分の和）を表すとする． $M(n,\mathbb{R})$ の部分集合 U, N を

$$U = \{A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{R}) \,|\, A \text{ は上三角行列，すなわち } i > j \text{ ならば } a_{ij} = 0\}$$
$$N = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \,|\, A \text{ はべき零，すなわち } A^m = O \text{ となる正の整数 } m \text{ が存在する }\}$$

とする．このとき以下の問に答えよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(1) $M(2,\mathbb{R})$ について，部分集合 U と N のそれぞれが線形部分空間であるか否かを判定し，その理由を述べよ．

(2) $A \in N$ が対角化可能ならば，$A = O$ であることを示せ．

(3) $A \in M(2,\mathbb{R})$ について，$\det A = 0$ かつ $\mathrm{tr}A = 0$ ならば，$A \in N$ であることを示せ．

(4) $A \in M(3,\mathbb{R})$ のとき，$\det A = 0$ かつ $\mathrm{tr}A = 0$ であるが，$A \notin N$ である例をあげよ．

(5) $U \cap N$ は，対角成分がすべて 0 であるような U の元全体であることを示せ．

(6) $\det A = 0$ であるような $A \in M(n,\mathbb{R})$ に対し，正則行列 $P \in M(n,\mathbb{R})$ をうまく取れば，$P^{-1}AP$ の第 1 列の成分はすべて 0 になることを示せ．

(7) $A \in N$ であるとき，正則行列 $P \in M(n,\mathbb{R})$ をうまく取れば，$P^{-1}AP \in U \cap N$ となることを示せ．

(8) $A \in N$ が $A^{n-1} \neq O$ を満たすならば，

$$\dim(\ker A^i) = i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となることを示せ．ただし，$B \in M(n,\mathbb{R})$ に対し，$\ker B$ は，B を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とみたときの核（カーネル）とする．

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[2] 次の問 (A) および (B) に答えよ.

(A)

(1) 実数 θ と正の整数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sin\theta = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$$

(2) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sin\theta = \theta\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\theta}{2^k}$$

(3) 正の整数 n に対して，区間 $I = (-\pi, \pi)$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

により定める．$\theta \in I$ に対して，積分値

$$\int_0^{\theta} f_n(x)dx$$

を計算せよ.

(4) (3) で定義した f_n は，$n \to \infty$ とするとき，I において広義一様に収束することを示せ.

(5) 極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を初等関数のみを用いて表せ.

(B) $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geq 0)$ という変数変換を考える.

(1) $f(x, y)$ が θ によらずに r のみに依存する関数であるための必要十分条件は,

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

であることを示せ.

(2) 原点 $(0, 0)$ を中心とする半径 R の円板を D_R と書く．$f(x, y)$ が (1) の条件を満たしているとき,

$$\iint_{D_R} f(x, y)dxdy = 2\pi\int_0^R rf(r, 0)dr$$

であることを示せ.

平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] 次の問 (A) および (B) に答えよ.

(A)

(1) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 $A = \{(x,y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ が開集合であること，および $B = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ が閉集合であることを定義に従って示せ.

(2) 上記の図形 A と B は同相（位相同型）ではないことを示せ.

(3) C をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の開集合とする．C の閉包 $\overline{C}$ の内部 $\mathrm{Int}(\overline{C})$ について，$C \subset \mathrm{Int}(\overline{C})$ であることを示せ．さらに，C が弧状連結であれば，$\mathrm{Int}(\overline{C})$ も弧状連結であることを示せ.

(4) $C \neq \mathrm{Int}(\overline{C})$ となるようなユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の弧状連結な開集合 C の例を一つあげよ.

(B) 実直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 $D = [0,1)$，$E = [0,\infty)$，$F = (0,1)$ について次の問に答えよ.

(1) D と E は同相であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ の自己同相写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $f(D) = E$ となるものは存在しないことを示せ.

(3) D と F は同相でないことを示せ.