平成２１年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 3 次実正方行列の全体を $M(3,\mathbb{R})$ とし, $A \in M(3,\mathbb{R})$ は

$$ {}^tAA = E \quad \text{および} \quad |A| = 1 $$

を満たす行列とする. ただし, E は単位行列, $|A|$ は A の行列式, 一般の行列 X に対して ${}^tX$ は X の転置行列を表す.

行列 A に関して, 以下の (A), (B) に答えよ.

(A) $\mathbb{C}^3$ の標準内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$ で定める. ただし, $\bar{\boldsymbol{x}}$ は 複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ の複素共役ベクトルを表す.

以下の問に答えよ.

(1) $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ.

(2) A の固有値は, 絶対値が 1 の複素数であることを示せ.

(3) λ が A の固有値ならば, $\bar{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ.

(4) 1 が A の固有値であることを示せ.

(B) $\mathbb{R}^3$ の標準内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ で定め, 線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める. また $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3\}$ を, 標準内積に関する $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底で $|\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_3| = 1$ を満たすものとする. ただし, $|\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_3|$ は縦ベクトル $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3$ をこの順に並べてできる行列の行列式を表す.

以下の問に答えよ.

(1) $\{f(\boldsymbol{t}_1), f(\boldsymbol{t}_2), f(\boldsymbol{t}_3)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ.

(2) $|f(\boldsymbol{t}_1)f(\boldsymbol{t}_2)f(\boldsymbol{t}_3)| = 1$ を示せ.

(3) $f(\boldsymbol{t}_3) = \boldsymbol{t}_3$ であるとする. このとき, 基底 $\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3\}$ に関する f の行列表示が次の Θ で与えられることを示せ:

$$ \Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

(4) $N = \{\ X \in M(3,\mathbb{R}) \mid \Theta X = X\Theta\}$ が $M(3,\mathbb{R})$ の線形部分空間であることを示せ.

(5) $0 < \theta < \pi$ のとき, N の次元を求めよ.

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科 第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[2] 次に答えよ．

(1) $|\sin x| \leq x\ (x > 0)$ を示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx\ (t > 0)$ が収束することを示せ．

(3) $t > 0$ に対し

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx, \quad f_n(t) = \int_0^n \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$
$$g(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$$

とおく．任意の $0 < a < b < \infty$ に対し，次を示せ．

(a) 関数列 $\{f_n\}$ は f に区間 $[a, b]$ 上で一様収束する．

(b) f_n の導関数列 $\{f'_n\}$ は g に区間 $[a, b]$ 上で一様収束する．

(4) $f'(t) = g(t)\ (t > 0)$ となることの理由を述べよ．

(5) $-g(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^2}g(t)$ を示せ．

(6) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ を示せ．

(7) $f(t) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, t\ \ (t > 0)$ を示せ．

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[**3**] X は距離空間とし，ρ は $0 < \rho < 1$ を満たす実定数とする．写像 $F : X \to X$ は，任意の $x, y \in X$ に対し

$$d(F(x), F(y)) \leq \rho \cdot d(x, y)$$

を満たすと仮定する．$x \in X$ と非負整数 n に対して，$F^n(x)$ を

$$F^0(x) = x, \quad F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$$

で帰納的に定義する．

　このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 $P \in X$ に対し，集合 $\{P\}$ は X の閉集合であることを示せ．

(2) F が連続写像であることを示せ．

(3) $d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq \rho^n d(x, F(x))$ を示せ．

(4) N を自然数とする．任意の $n, m \geq N$ と $x \in X$ に対し，

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{\rho^N}{1-\rho} d(x, F(x))$$

が成り立つことを示せ．

(5) 任意の $x \in X$ に対し，点列 $x, F(x), F^2(x), F^3(x), \ldots$ がコーシー列になることを示せ．

(6) X が完備距離空間であるとき，X の点 y で，$F(y) = y$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

(7) 実数値関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，次の条件 (a),(b) を満たすものを見つけよ．

　(a) 任意の $x \neq y \in \mathbb{R}$ に対し $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ を満たす．

　(b) 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対し $g(z) \neq z$ となる．