平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

[4] R を単位元を持つ可換環とし，$R^\times$ により R の乗法的可逆元が乗法についてなすアーベル群を表す．

(1) $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ の位数を求めよ．

(2) $a, b \in R$ に対し，$\phi_{a,b}(x) := ax + b$ により R から R への写像 $\phi_{a,b}$ を定める．$\phi_{a,b}$ が全単射であるための必要十分条件は，$a \in R^\times$ であることを示せ．

(3) R から R への全単射写像全体が，写像の合成についてなす群を S とする（環準同型写像とは限らない全ての全単射写像を考える）．このとき，

$$G := \{\phi_{a,b} \mid a \in R^\times,\ b \in R\}$$

は S の部分群であることを示せ．

(4) $N := \{\phi_{1,b} \mid b \in R\}$ は G の正規部分群であることを示し，剰余群 G/N は $R^\times$ に同型であることを示せ．

(5) $H := \{\phi_{a,0} \mid a \in R^\times\}$ とおく．$\psi \in G$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．
(a) $g^{-1}\psi g \in H$ となる $g \in N$ が存在する．
(b) $\psi(c) = c$ となる $c \in R$ が存在する．

(6) p を素数とし，$R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であるとする．このとき，G の共役類はいくつあるか．

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[5] アフィン座標系 (x, y) の与えられた $\mathbb{C}^2$ を考える．$\mathbb{C}^2$ の部分集合 S に対し，多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ の部分集合 $I(S)$ を

$$I(S) := \{\, f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \mid \text{すべての } (a, b) \in S \text{ に対して } f(a, b) = 0 \,\}$$

と定義する．

(1) 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}^2$ に対し $I(S)$ は $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルであることを示せ．

(2) $S_0 := \{(0, 0)\}$ とおく．イデアル $I(S_0)$ は二つの多項式 $x, y \in \mathbb{C}[x, y]$ で生成されることを示し，剰余環 $\mathbb{C}[x, y]/I(S_0)$ は $\mathbb{C}$ と同型であることを示せ．

(3) $S_1 := \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subset \mathbb{C}^2$ とおく．$I(S_1)$ は $\mathbb{C}[x, y]$ の素イデアルではないことを示せ．

(4) 剰余環 $\mathbb{C}[x, y]/I(S_1)$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元は 3 であることを示せ．（ただし $\mathbb{C}[x, y]/I(S_1)$ は，定数多項式のなす部分環 $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x, y]$ の元によるスカラー倍により $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす.）

(5) イデアル $I(S_1)$ を生成する有限個の多項式の組を一組求めよ．

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[6] 3 次元空間において, xz 平面内に曲線 $x = x(u)$, $z = z(u)$ が与えられている．ただし u は曲線のパラメータで，$x(u) > 0$, $x'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$ を満たしているとする．この曲線を z 軸の回りに回転してできる曲面

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x(u)\cos v, \\ y(u,v) &= x(u)\sin v, \\ z(u,v) &= z(u) \end{aligned}$$

に関して次の問に答えよ.

(1) u 曲線と v 曲線は直交していることを示せ.

(2) この曲面の単位法線ベクトルを求めよ.

(3) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ のヤコビ行列の階数はすべての点 $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ において 2 であることを示せ.

(4) この曲面の第一基本形式 $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ を求めよ.

(5) この曲面の第二基本形式 $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ を求めよ.

(6) この曲面のガウス曲率 K は $-x''(u)/x(u)$ となることを示せ.

(7) $K = -1$ (定数) となる曲線 $x = x(u)$, $z = z(u)$ の例を一つあげよ．またパラメータ u の範囲に注意しながら, この曲線の概形を描け.

[7] 空間 $X := \mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上に 2 つの同値関係 $\sim$, $\sim_+$ を次で定義する.

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad y = rx \text{ となる 0 でない実数 } r \text{ が存在する}$$
$$x \sim_+ y \quad \Longleftrightarrow \quad y = rx \text{ となる正の実数 } r \text{ が存在する}$$

以下の問に答えよ.

(1) $\sim_+$ が同値関係であることを示せ.

(2) 商空間 $X/_{\sim_+}$ から商空間 $X/_{\sim}$ への連続な全射が存在することを示せ.

(3) $x \sim_+ y$ かつ $x \neq y$ のとき，線分 xy 上の点 z は $x \sim_+ z$ となることを示せ.

(4) 球面 $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ から X への包含写像 $i : S^2 \to X$ はホモトピー同値写像であることを示せ．すなわち，連続写像 $j : X \to S^2$ で

$$j \circ i \simeq 1_{S^2} \quad \text{かつ} \quad i \circ j \simeq 1_X$$

となるものが存在することを示せ．ここで，$\simeq$ はホモトープ，1_{S^2} と 1_X は恒等写像を表す.

(5) S^2 と $X/_{\sim_+}$ が同相であることを示せ.

(6) S^2 上に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad y = x \text{ または } y = -x$$

で定めるとき，商空間 $S^2/_{\sim}$ と $X/_{\sim}$ は同相であることを示せ.

(7) $X/_{\sim}$（または $S^2/_{\sim}$）を射影平面といい，P^2 と表す．S^2 は P^2 の被覆空間であることを示せ.

(8) P^2 のオイラー標数を求めよ.

(9) P^2 の基本群およびホモロジー群を求めよ.

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**8**]　D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とするとき, 以下の問に答えよ.

(1)　関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が D で正則であることの定義を述べよ.

(2)　D が単連結であることの定義を述べよ.

(3)　D を単連結領域，f を D で正則な関数とする．このとき，f の原始関数 F が存在することを示せ．即ち，任意の $z \in D$ に対し, $F'(z) = f(z)$ を満たす D で正則な関数 F が存在することを示せ.

(4)　D を単連結領域，f を D で正則な関数とし，$f(z) = 0$ を満たす $z \in D$ が存在しないと仮定する．このとき，$e^{g(z)} = f(z)$, $\{h(z)\}^2 = f(z)$ を満たす D で正則な関数 g, h が存在することを示せ.

[**9**]　$[0,\infty)$ 上の実数値ルベーグ可測関数 f で，任意の $t > 0$ に対して $e^{-tx}f(x)$ が x の関数として $[0,\infty)$ 上でルベーグ積分可能となるものの全体を F で表す．$f \in F$ に対して，関数 $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$ で定義する．このとき，以下の問に答えよ.

(1)　$t > 0$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\, dx$ の値を求めよ.

(2)　f が $[0,\infty)$ 上で有界なルベーグ可測関数であるか，ルベーグ積分可能な関数であれば，$f \in F$ となることを示せ.

(3)　f が $[0,\infty)$ 上でルベーグ積分可能であれば，$\displaystyle\lim_{t\to 0+0} g(t) = \int_0^\infty f(x)\, dx$ が成り立つことを示せ.

(4)　$f \in F$ は非負値とする．このとき，有限な極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0+0} g(t)$ が存在するならば，f は x の関数として $[0,\infty)$ 上でルベーグ積分可能となることを示せ.

(5)　f が有界連続関数であるとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} tg(t) = f(0)$ が成り立つことを示せ.

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[10] $\lambda > 0$ を定数, Z と U を互いに独立な確率変数とし, Z は平均 0, 分散 $1/(1+\lambda^2)$ の正規分布に従い, U は平均 0, 分散 $\lambda^2/(1+\lambda^2)$ の正規分布に従うとする．このとき, 以下の問に答えよ．ただし, $\phi(x)$ と $\Phi(x)$ は, それぞれ次式で与えられる確率密度関数と分布関数とする．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$$

(1)　$Y = |U|$ とおく．Y の確率密度関数を求めよ．

(2)　$X = Z + Y$ とおく．X と Y の同時密度関数を求めよ．

(3)　X の確率密度関数が $2\phi(x)\Phi(\lambda x)$ となることを示せ．

(4)　$W = X^2$ とする．W が自由度 1 の χ^2 分布に従うことを示せ．ただし自由度 1 の χ^2 分布の確率密度関数は

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} x^{-1/2} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

である．

[11] $f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数として, 次の微分方程式 (A), (B), (C) を考える．以下の問に答えよ．

$$x''' + tx'' + 3x' + tx = f(t) \tag{A}$$

$$y'' + y = f(t) \tag{B}$$

$$z'' + z = 0 \tag{C}$$

(1)　方程式 (C) の一般解 $z = z(t)$ を求めよ．

(2)　関数

$$y = y(t) = \int_0^t \sin(t-s)\phi(s)ds$$

が方程式 (B) の解となるように連続関数 $\phi(s)$ を定めよ．

(3)　$f(t) = t$ のとき, 方程式 (B) の一般解 $y = y(t)$ を求めよ．

(4)　方程式 (A) の解 $x = x(t)$ に対して $y = x' + tx$ とおくと，y は方程式 (B) の解となることを示せ．

(5)　$f(t) = t$ とおいたとき, 方程式 (A) を考える．このとき, $[0, \infty)$ 上の任意の解 $x(t)$ は $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ を満たすことを示せ．