平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1]

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値 2 に対する固有ベクトルを１つ見つけよ.

(2) 3 次正方行列 B が $AB = 2B$ を満たすならば, B の３つの列ベクトルはそれぞれ零ベクトルか, あるいは A の固有値 2 に対する固有ベクトルであることを示せ.

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の, 固有値 1 に対する固有ベクトルを１つ見つけよ.

(4) 零行列でない 3 次正方行列 B で $AB = 2B, BA = B$ を満たすものを１つ求めよ.

(5) A の固有多項式と固有値を求めよ.

(6) A のジョルダン標準形を求めよ.

(7) E を 3 次の単位行列とする. V を 3 次実正方行列全体がなす線形空間とし, 線形写像 $\varphi : V \to V$ を $\varphi(C) = (A - E)^2 C$ により定義する. このとき φ の核 $\operatorname{Ker} \varphi$ の次元を求めよ.

平成２１年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[**2**] 次の問に答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で一様連続な関数とし，$\{a_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列とする．自然数 n に対し $\mathbb{R}$ 上の関数 f_n を $f_n(x) = f(x + a_n)$ で定める．関数列 $\{f_n\}$ は f に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ.

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおく.

(a) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ は収束することを示せ.

(b) $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を示せ.

(c) I_n を求めよ.

(3) $z = f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数で，$x = uv$, $y = \dfrac{1}{v}$ とおく.

(a) z の u, v に関する偏導関数 z_u, z_v, z_{uu} を z の x, y に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $z_{xx} + 2xy^2 z_x + 2(y - y^3) z_y + x^2y^2 z = 1$ のとき，$z_{uu} + 2uv^2 z_u + 2(v - v^3) z_v + u^2v^2 z = v^2$ となることを示せ.

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[3] 集合 X から集合 Y への全射 $\pi : X \to Y$ を考える．次の問に答えよ．

(1) B を Y の部分集合とするとき，$\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ が成立することを示せ．

(2) $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Y の部分集合族とするとき，$\pi^{-1}(\cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \cup_{\lambda\in\Lambda}\pi^{-1}(B_\lambda)$ が成立することを示せ．

(3) $\mathcal{O}_X$ を集合 X 上の位相を定める開集合族とする．Y の部分集合 B で $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$ となるもの全体が作る Y の部分集合族を $\mathcal{O}_Y$ とする．このとき，$\mathcal{O}_Y$ は開集合系の公理を満たすことを示せ．

(4) X，Y の位相を (3) の $\mathcal{O}_X$，$\mathcal{O}_Y$ で定める．位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $\tilde{f} : X \to Z$，$f : Y \to Z$ があり，$\tilde{f} = f \circ \pi$ が成立しているとする．このとき，$f : Y \to Z$ が連続となるための必要十分条件は $\tilde{f} : X \to Z$ が連続写像であることを示せ．

(5) X，Y の位相を (3) の $\mathcal{O}_X$，$\mathcal{O}_Y$ で定める．X がコンパクトであるなら Y もコンパクトであることをコンパクトの定義に従って証明せよ．

(6) $(X, \mathcal{O}_X)$ は閉区間 $[0,1]$ に通常の距離から定まる位相を入れたものとする．次で定まる $X = [0,1]$ 上の同値関係 $\sim$ を考える．

$$x \sim y \iff x = y \text{ または } \{x, y\} = \{0, 1\}.$$

いま Y を商集合 $[0,1]/\sim$ とし，$\pi : X \to Y$ を商射影とする．Y の位相は (3) の $\mathcal{O}_Y$ により定める．またユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の単位円周 S^1 を考える．

(a) 上記の位相空間 X から単位円周 S^1 への連続写像 $\tilde{f} : X \to S^1$ で

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) \iff x \sim y$$

となるものを与えよ．

(b) 上記の位相空間 Y は単位円周 S^1 に同相であることを証明せよ．