平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専門科目(午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] $\mathbb{C}$ を複素数体とし，n を１以上の自然数とする．$GL_n(\mathbb{C})$ で，$\mathbb{C}$ を成分とする n 次正則行列（すなわち可逆な行列）の集合をあらわす.

(1) $GL_n(\mathbb{C})$ が積について群になるかどうか，群の公理を全てあげて判定せよ.

(2) $A = \mathbb{C}^n$ を n 次元縦ベクトルの空間とし，A の任意の二元 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に二項関係 $\sim$ を

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} \text{ となる} \lambda \in \mathbb{C} \text{ が存在する}$$

で定義する．$\sim$ が同値関係とならない理由を示せ.

さて，(2) で定義した二項関係は，A から零ベクトルを除いた集合 $A \setminus \{\mathbf{0}\}$ においては同値関係となることが知られている．対応する同値類の集合を

$$P^{n-1} = (A \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$$

であらわし，$(n-1)$ 次元射影空間という．$\mathbf{x}$ が属する同値類を $[\mathbf{x}]$ であらわし，射影空間の点という．$M \in GL_n(\mathbb{C})$ をとると，写像

$$p(M) : P^{n-1} \to P^{n-1}, \quad [\mathbf{x}] \mapsto [M\mathbf{x}]$$

が定義される.

(3) $Bij(P^{n-1})$ で，P^{n-1} からそれ自身への全単射の集合が合成に関してなす群をあらわす.
$p : GL_n(\mathbb{C}) \to Bij(P^{n-1}), \quad M \mapsto p(M)$ が群準同型であることを示せ.

(4) p の核 $\ker p$ を求めよ.

(5) 群準同型定理を用いて, p の像を $GL_n(\mathbb{C})$ の商群として記述せよ．この群を $PGL_n(\mathbb{C})$ という.

(6) $\mathbb{C}$ 成分の横ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \mathbf{0}$ に対して,

$$\{[\mathbf{x}] \in P^{n-1} \mid \mathbf{a}\mathbf{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

で定義される部分集合を，P^{n-1} の超平面という.

P^{n-1} の一つの超平面にのらない n 個の点の順序付きの組 $Q_1, \ldots, Q_n$ を考える．もう一組，そのような点の組 $R_1, \ldots, R_n$ を考える．このとき，$Q_1, \ldots, Q_n$ を $R_1, \ldots, R_n$ にそれぞれ写すような $PGL_n(\mathbb{C})$ の元が，一つは存在することを示せ.

(7) (6) において，さらに点を一つずつ増やし，$Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ を「これらの $n+1$ 点のうち，どの n 点も一つの超平面にのらない点」とする．$R_1, \ldots, R_{n+1}$ も同様とする．このとき，$Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ を $R_1, \ldots, R_{n+1}$ にそれぞれ写すような $PGL_n(\mathbb{C})$ の元が，ただ一つ存在することを示せ.

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[5]　本問では自然数とは 1 以上の整数のこととし，その集合を記号 $\mathbb{N}$ であらわす．$\mathbb{N}$ の部分集合 $S \subset \mathbb{N}$ が加法について閉じているとは，任意の $n, m \in S$ に対し $n + m \in S$ が成り立つこととする．自然数 n, m に対し集合 $\langle n, m \rangle$ を

$$\langle n, m \rangle := \{nx + my \mid x \text{ と } y \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で，} x = y = 0 \text{ ではない }\}$$

と定義する．

(1)　自然数 n と m が与えられたとする．加法について閉じている $\mathbb{N}$ の部分集合 S で $\{n, m\}$ を含む最小のものは $\langle n, m \rangle$ であることを示せ．

(2)　$\langle 2, 7 \rangle$ に含まれない最大の自然数を求めよ．また $\langle 5, 9 \rangle$ に含まれない最大の自然数を求めよ．

(3)　自然数 n と m の最大公約数は d であるとする．整数 X と Y をうまく選べば $nX + mY = d$ とできることを示せ．

(4)　自然数 n と m の最大公約数は d であるとする．N が nm より大きい d の倍数であれば，自然数 x と y をうまく選べば $nx + my = N$ とできることを示せ．なお，(3) の結果は証明なしで使ってもよい．

(5)　空でない $S \subset \mathbb{N}$ が加法について閉じているとし，S の元全体の最大公約数が d であるとする．このとき，ある自然数 N_0 が存在して，N_0 より大きい d の倍数は全て S に含まれることを示せ．なお，(4) の結果は証明なしで使ってもよい．

以下，$\langle n_1, n_2, \ldots, n_r \rangle$ とは加法について閉じている $\mathbb{N}$ の部分集合で $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ を含む最小のものであると定義する．

$$\langle n_1, n_2, \ldots, n_r \rangle = \{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \mid x_1, \ldots, x_r \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で，一つは } 0 \text{ ではない }\}$$

が成り立つ.（これは示さなくてもよい.）

(6)　$S \subset \mathbb{N}$ が加法について閉じているとする．このとき有限集合 $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\} \subset S$ が存在して，$S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_r \rangle$ となることを示せ．

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午後)

[6] $\mathbb{R}^2$ から原点を抜いた集合を $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で表し, $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる. また, X 上の同値関係を

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists c \neq 0 : v = cw$$

で定義する. 位相空間 X を同値関係 $\sim$ で割って得られる商集合を $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 := X/\sim$ で表し, 自然な射影 $\pi : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ から決まる商位相を入れる. さらに, $[x:y] := \pi(x,y)$ とし,

$$U_x := \{[x:y] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \mid x \neq 0\}, \quad \varphi_x : U_x \to \mathbb{R} : [x:y] \mapsto \frac{y}{x},$$
$$U_y := \{[x:y] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \mid y \neq 0\}, \quad \varphi_y : U_y \to \mathbb{R} : [x:y] \mapsto \frac{x}{y}$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(1) 集合 U_x が $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ の開集合である理由を説明せよ.

(2) 写像 φ_x が well-defined であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ には, 局所座標系 $\{(U_x, \varphi_x), (U_y, \varphi_y)\}$ によって C^∞ 級多様体の構造が定まる. この局所座標系に対して, 座標変換が C^∞ 級であることを確認せよ.

(4) 次で与えられる $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to M_2(\mathbb{R})$ が well-defined であることを示せ. ただし $M_2(\mathbb{R})$ は 2×2 実行列全体の成すベクトル空間である:

$$f([x:y]) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}.$$

(5) 写像 f が C^∞ 級であることを示せ. ただし $M_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^4$ と自然に同一視する.

(6) 写像 f がはめ込みであること, すなわち, 各点での Jacobi 行列の階数が 1 であることを示せ.

(7) $\mathrm{O}(2)$ を 2 次の直交行列の成す群とする. 各 $g \in \mathrm{O}(2)$ に対して,

$$F_g : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1 : \pi(v) \mapsto \pi(gv),$$
$$I_g : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) : T \mapsto g \cdot T \cdot {}^t g$$

によって写像を定義する. このとき $f \circ F_g = I_g \circ f$ を示せ.

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[7] 以下の問 (A)(1)-(5) および (B)(1)-(4) に答えよ．

(A) 球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$ に関する以下の問に答えよ．

(1) S^2 の部分空間 $S^2_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \,|\, z \geq 0\}$ は円板 $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ と同相であることを証明せよ．

(2) D^2 が可縮（すなわち，1 点とホモトピー同値）であることを証明せよ．

(3) S^2_+ の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群 $H_*(S^2_+)$ を求めよ．

(4) S^2 の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群 $H_*(S^2)$ を求めよ．

(5) S^2 上の自己同相写像 $f(x,y,z) = (x,y,-z)$ に対し，f が誘導する準同型写像 $f_* : H_*(S^2) \to H_*(S^2)$ を求め，f が S^2 上の恒等写像にホモトピックでないことを証明せよ．

(B) 単位円 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ と閉区間 $I = [-1,1]$ の直積 $A := S^1 \times I$ をアニュラスと呼ぶ．次の問に答えよ．

(1) A の基本群 $\pi_1(A)$ を求めよ．

(2) A から A への連続写像 g で，A のどの点の逆像も 2 点となるようなものを 1 つ構成せよ．また，その g が誘導する準同型写像 $g_* : \pi_1(A) \to \pi_1(A)$ を求めよ．

(3) 点 $p := (1,0) \in S^1 \times I$ に対して，空間 $X := A - \{p\}$ の基本群を求めよ．

(4) X はある向き付け不可能な閉曲面 M から n 個の点を除いて得られる空間とホモトピー同値である．このような M と n の例を挙げよ．

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[8]　以下の問に答えよ．

(1)　$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^n}\,dz$ を求めよ．ただし，C は複素平面 $\mathbb{C}$ 内で原点を中心とし半径 1 で正の向きに 1 周する円である．

(2)　$\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上で有界であるかどうか調べよ．

(3)　集合 $\{\cos(x+iy) \mid 0 < x < \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbb{R}\}$ を複素平面上で図示せよ．

(4)　f を $\mathbb{C}$ 上の有界な連続関数とするとき，$n = 2, 3, 4, \ldots$ に対し

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^n}\,dz = 0$$

を示せ．ただし，C_R は複素平面 $\mathbb{C}$ 内で原点を中心とし半径 R で正の向きに 1 周する円である．

(5)　(4) を用いて，$\mathbb{C}$ 上の有界な正則関数は定数に限ることを示せ．

[9]　f を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ積分可能な実数値関数とし，g を $\mathbb{R}$ 上の有界かつ非負なルベーグ可測関数で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy = 1$ を満たすものとする．また $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$h_n(x) = n\int_{\mathbb{R}} g(n(x-y))f(y)\,dy$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　f は $\mathbb{R}$ 上で連続とする．このとき任意の $R > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{-R}^{R} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　f は $\mathbb{R}$ 上で連続とする．このとき $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0$ が成り立つことを示せ．

(3)　非負で連続な $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，$\mathbb{R}$ 上で

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad かつ \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

を満たすとする．このとき $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0$ が成り立つことを示せ．

(4)　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x - \frac{1}{n}y)\,dy$ が成り立つことを示せ．

(5)　(3) と同じ条件が満たされているとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ が成り立つことを示せ．

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午後)

[10] 確率変数 X は繰り返し回数 n, 成功確率 p の二項分布に従っているとする. ただし, 二項分布の確率密度関数は, ${}_nC_x$ を二項係数とすると,

$$f(x|p) = \begin{cases} {}_nC_x\, p^x(1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, \ldots, n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) X の平均と分散を, p と n を用いて表せ.

(2) p の最尤推定量を $\hat{p}_{\mathrm{M}}$ とおく. $\hat{p}_{\mathrm{M}} = \dfrac{X}{n}$ となることを示せ.

(3) p はパラメータ a, b $(a, b > 0)$ をもつようなベータ分布に従うとする. ただし, ベータ分布の確率密度関数は

$$g(p) = \begin{cases} \dfrac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)} & (0 < p < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であり, ベータ関数 $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$ はガンマ関数 $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$ を用いて

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

と書ける. このとき, p の平均と分散を a と b を用いて表せ.

(4) X と p の同時確率密度関数を $h(x,p) = f(x|p)g(p)$ とする. このとき, X の周辺確率密度関数 $q(x)$ を計算せよ.

(5) p の事後確率は $\pi(p|x) = \dfrac{h(x,p)}{q(x)}$ で定義される. このとき, 事後確率を確率密度関数としたときの p の平均 $\hat{p}_{\mathrm{B}}$ を求めよ.

(6) p の推定量 $\hat{p}$ に対して, $L(\hat{p})$ を

$$L(\hat{p}) = \int_0^1 \sum_{x=0}^{n} (\hat{p}-p)^2 h(x,p)\,dp$$

で定義する. このとき, $L(\hat{p}_{\mathrm{M}})$, $L(\hat{p}_{\mathrm{B}})$ を求め, $L(\hat{p}_{\mathrm{M}}) > L(\hat{p}_{\mathrm{B}})$ となることを示せ.

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[11] $\mathbb{R}$ 上の連続関数 q に対し, 常微分方程式

$$(*)_q \qquad\qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

は，$t_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し, $t = t_0$ における初期条件 $x(t_0) = \alpha$, $x'(t_0) = \beta$ を与えるごとに $\mathbb{R}$ 上の C^2 級の解 x がただ 1 つ存在することはよく知られている．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 正数 ω に対し，q が次で与えられるときの $(*)_q$ の一般解を求めよ.

(a) $q(t) = -\omega^2 \quad (t \in \mathbb{R})$.

(b) $q(t) = \omega^2 \quad (t \in \mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 φ と ψ が $\mathbb{R}$ 上で 1 次独立であることの定義を書け.

(3) φ と ψ を恒等的に 0 ではない $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数で微分方程式 $(*)_q$ を満たし，$\varphi(0) = \psi(0) = 0$ を満たすとする．このとき，$\varphi'(0) \neq 0$, $\psi'(0) \neq 0$ を示せ．また φ と ψ は $\mathbb{R}$ 上で 1 次従属であることを示せ.

(4) x_j $(j = 1, 2)$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数 q_j に対する微分方程式 $(*)_{q_j}$ の解とし,

$$z(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．z' を q_1, q_2, x_1, x_2 を用いて表せ.

(5) (4) の x_1, x_2 は区間 $I = [t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ 上で正でありかつ $x_1(t_1) = x_2(t_1)$, $x_1'(t_1) \geq x_2'(t_1)$ を満たすとする．もし q_1, q_2 が $q_1(t) < q_2(t)$ $(t \in I)$ を満たすならば $x_1(t) > x_2(t) \quad (t_1 < t \leq t_2)$ となることを示せ.