平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] $M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素正方行列の全体とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(A, \lambda) := \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid AX = \lambda XA\}$$

とおくとき，次の問に答えよ.

(1) $Z(A, \lambda)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $M_2(\mathbb{C})$ の線形部分空間

$$Z\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -1\right)$$

の基底を一組求めよ.

(3) A の固有ベクトル v を取り，その固有値を α とする．$X \in Z(A, \lambda)$ に対し，Xv は零ベクトルであるか，または A の固有値 $\alpha\lambda$ に対する固有ベクトルであることを示せ.

(4) $Z(A, \lambda)$ が正則行列を含むとき，自然数 $l > 0$ が存在して，任意の $X \in Z(A, \lambda)$ に対して $A^l X = XA^l$ となることを示せ.

(5) A の固有値が 0 のみであり，$\lambda \neq 0$ ならば，$Z(A, \lambda)$ は正則行列を含むことを示せ.

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の問に答えよ.

(A) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^3 級関数とし，$f'''(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で有界とする.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R_3(x), \qquad \text{ただし } R_3(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)\,dt.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^2} = 0$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(0) + f(-x)}{x^2} = f''(0)$ を示せ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-|x|}\,dx$ は収束することを示せ.

(B) 曲面 $z = \dfrac{x^2}{4} + y^2$, $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 2x$ と平面 $z = 0$ で囲まれた領域の体積を求めよ.

平成２２年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] 次の問に答えよ.

(A) 位相空間 X の部分空間 A を考える．このとき，A が連結であることの定義を述べよ．また，A が弧状連結であることの定義を述べよ.

(B) 位相空間 X の部分空間 A が連結ならば，A の X における閉包 $\overline{A}$ も連結であることを示せ.

(C) X, Y を距離空間とし，Y はコンパクトとする．$f : X \to Y$ を X 上で定義された Y への写像とする．このとき，$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ が閉集合ならば, f は連続であることを示せ.