平成２３年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 13 & -9 & 3 \\ 18 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

とし, 集合 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2a - 2b + c = 0 \right\}$$

とする. 次の問に答えよ.

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) V の基底を一組求めよ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ なら $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ となることを示せ.

(4) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ に対して $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を対応させることによって写像 $\varphi : V \to V$ を定義する. φ は線形写像であることを示せ.

(5) 問題 (2) で求めた基底に関して, 線形写像 φ を行列表示せよ.

(6) A の固有値 2 に対する固有ベクトルをひとつ求めよ.

(7) ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 集合 $\left\{ A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ; n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \right\}$ が有限集合となるための必要十分条件は, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ であることを示せ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[2] 次の問に答えよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}$ が収束するとき $\{a_n\}$ は有界数列であることを示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であるとき部分列 $\{a_{n_j}\}$ で $|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}| < 2^{-j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ となるものが存在することを示せ.

(3) f を区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数とする. I 上の関数列 $\{f(x^n)\}$ は任意の $0 \leq c < 1$ に対して区間 $[0, c]$ において一様収束することを示せ.

(4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数 f と任意の自然数 n に対して広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x) x^{-(n-1)/n} dx$ が存在することを示せ.

(5) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数 f に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) x^{-(n-1)/n} dx$ を求めよ.

(6) $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級（連続微分可能）な実数値関数 $f(x, y)$ に対して

$$F(a, b) = \int_0^1 f(at, bt) dt \qquad ((a, b) \in \mathbb{R}^2)$$

とおく. 関数 F は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級であることを示せ. さらに偏導関数 F_a, F_b を求めよ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[3]　集合 $\mathbb{R}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ にはそれぞれ通常の位相が入っているものとする．このとき, 次の問に答えよ.

(1) 以下の各写像は存在するか．存在する場合には例をあげ, 存在しない場合には, その証明を与えよ.

- (a) 連続な全射 $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$.
- (b) 連続な単射 $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$.
- (c) 連続な全射 $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- (d) 連続な単射 $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(2) $[0, 2\pi]$ と S^1 は同相でないことを示せ.