平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] ８個の元からなる集合 $\{1, 2, \ldots, 8\}$ から自分自身への全単射写像（すなわち $\{1, 2, \ldots, 8\}$ の置換）全体が写像の合成に関してなす群を S_8 と書く．$1, 2, \ldots, 8$ の順列 $a_1, a_2, \ldots, a_8$ に対し,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{pmatrix} \in S_8$$

により $i \mapsto a_i$ $(i = 1, \ldots, 8)$ なる置換を表す.

$$\begin{aligned} \tau &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \\ \rho &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) τ および ρ の位数を求めよ.

(2) τ および ρ は偶置換か奇置換かを判定せよ.

(3) 置換 τ を含む S_8 の共役類 $\{\gamma\tau\gamma^{-1} \mid \gamma \in S_8\}$ に含まれる元の個数を求めよ.

(4) 各整数 k に対し,

$$\sigma_k := \rho^k \tau \rho^{-k}$$

とおく．集合 $\{\sigma_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ により生成される S_8 の部分群を H とする．H はアーベル群であることを示し，その位数を求めよ.

(5) τ と ρ により生成される S_8 の部分群を G とする．H は G の正規部分群であることを示せ.

(6) G の位数を求めよ.

(7) G の部分群で位数８の巡回群であるものの個数を求めよ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[5] 可換環 R において $a_1, \ldots, a_n \in R$ の生成するイデアルを $(a_1, \ldots, a_n)$ と表す.

$\mathbb{R}[X, Y]$ を実数係数 2 変数多項式環とし, $X^2 + Y^2 - 1$ の生成するイデアル $(X^2 + Y^2 - 1)$ による剰余環を

$$A := \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$$

とおく. $X, Y \in \mathbb{R}[X, Y]$ の A における剰余類をそれぞれ x, y と表し，実数 r の A における剰余類はそのまま r と表すことにする.（すると，$f(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ の A における剰余類は $f(x, y)$ と表される.）以下の問いに答えよ.

(1) $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ を $g(X) \in \mathbb{R}[X, Y]$ に写像する自然な埋め込み $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X, Y]$ を考える. この埋め込みと標準的な全射 $\mathbb{R}[X, Y] \to A$ を合成したものは，$\mathbb{R}[X]$ から A への単射であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}[X, Y]$ の元 $f(X, Y)$ に対し，環の同型

$$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, f(X, Y)) \;\cong\; A/(f(x, y))$$

を示せ.

(3) x, y の生成する A のイデアル (x, y) は A に一致することを示せ.

(4) p, q を $p^2 + q^2 = 1$ を満たす実数とする. このとき,

(a) $X^2 + Y^2 - 1$ は $\mathbb{R}[X, Y]$ のイデアル $(X - p, Y - q)$ に含まれることを示せ.

(b) $x - p,\ y - q$ の生成する A のイデアル $(x - p, y - q)$ は極大イデアルであることを示せ.

(5) $x + y$ を含む A の極大イデアルはいくつあるか.

(6) $(x + y + r)$ が A の素イデアルとなる実数 r の範囲を求めよ.

(7) 任意の実数 r に対して $x+y+r$ は A において既約であることを示せ. すなわち，$x+y+r = \alpha\beta$ $(\alpha, \beta \in A)$ ならば，α または β は A の単元（可逆元）であることを示せ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[6] S^2 を $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元単位球面とし, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を 2 次元実射影空間とする．ここで, 2 次元実射影空間とは, $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ を, 同値関係

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v = cw$$

で割って得られる商空間である．また, $(x_1, x_2, x_3) \in X$ を含む同値類を $[x_1 : x_2 : x_3]$ で表す．以下の問に答えよ.

(1) 次で定義される S^2 の局所座標 (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) を考える:

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0\}, \quad \varphi_1(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3),$$
$$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_2 > 0\}, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_3).$$

このとき (U_1, φ_1) から (U_2, φ_2) への座標変換が C^∞-級であることを確かめよ.

(2) 次で定義される $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ の局所座標 (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2) を考える:

$$V_1 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_1 \neq 0\}, \quad \psi_1([x_1 : x_2 : x_3]) := \frac{1}{x_1}(x_2, x_3),$$
$$V_2 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_2 \neq 0\}, \quad \psi_2([x_1 : x_2 : x_3]) := \frac{1}{x_2}(x_1, x_3).$$

このとき ψ_1 が well-defined であることを示せ．また, (V_1, ψ_1) から (V_2, ψ_2) への座標変換が C^∞-級であることを確かめよ.

(3) 写像 $f : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を $f(x_1, x_2, x_3) := [x_1 : x_2 : x_3]$ によって定義する．このとき f が C^∞-級写像であることを示せ.

(4) 点 $p_0 := (1, 0, 0) \in S^2$ における写像 f の微分 $(df)_{p_0} : T_{p_0}S^2 \to T_{f(p_0)}\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ の階数を求めよ.

(5) A を 3 次の直交行列とし, 写像 $\widetilde{F_A} : S^2 \to S^2$ を $\widetilde{F_A}(p) := pA$ (行ベクトル p と行列 A の積) で定義する．このとき, 写像 $F_A : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ で $f \circ \widetilde{F_A} = F_A \circ f$ を満たすものが存在することを示せ.

(6) 写像 f の微分 $(df)_p$ の階数が $p \in S^2$ によらずに一定であることを, (5) を用いて示せ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[7]　以下の問 (A)(1)-(4) および (B)(1)-(4) に答えよ．但し $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．
(A) 写像のホモトピーに関する次の問に答えよ．

(1)　位相空間 X から位相空間 Y への連続写像 f と g がホモトピックであることの定義を述べよ．

(2)　任意の位相空間 X から平面 $\mathbb{R}^2$ への任意の連続写像 f は，定値写像

$$g : X \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = (1, 0)$$

とホモトピックであることを証明せよ．

(3)　上の (2) の主張において $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ に置き換えると偽の命題となる．その理由を反例を挙げて説明せよ．

(4)　２つの位相空間 X と Y がホモトピー同値であることの定義を述べ，次の３つの位相空間 A, B, C をホモトピー同値で分類せよ．

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} - \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \\ C &= S^1 \times S^1 - \{(1,1)\} \end{aligned}$$

(B) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の正方形領域 $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ の上下，左右の辺をそれぞれ同じ向きに貼り合わせて得られる位相空間を T とする．すなわち，X において $(0,y)$ と $(1,y)$ を貼り合わせ，$(x,0)$ と $(x,1)$ を貼り合わせて得られる位相空間が T である．（ここで x, y は閉区間 $[0,1]$ の全ての点を動く．）また $p : X \to T$ を商写像（等化写像）とする．次の問に答えよ．

(1)　写像 $f : X \to S^1 \times S^1$ を $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ で定める．このとき，連続写像 $h : T \to S^1 \times S^1$ で $f = h \circ p$ となるものが存在することを証明せよ．

(2)　連続写像 $h : T \to S^1 \times S^1$ が同相写像であることを証明せよ．（ヒント：T がコンパクトであることを用いて，h が閉写像であることを証明せよ．）

(3)　位相空間 T の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群 $H_*(T)$ を求めよ．

(4)　連続写像 $\varphi : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ を $\varphi(z,w) = (z^2, w)$ で定めるとき，φ が誘導する準同型写像 $\varphi_* : H_2(S^1 \times S^1) \to H_2(S^1 \times S^1)$ を記述し，その余核

$$H_2(S^1 \times S^1)/\varphi_*(H_2(S^1 \times S^1))$$

を求めよ．

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[8]　以下の問に答えよ．

(1)　$n \geq 1$ を整数，$R \geq n+1$ を定数とする．複素平面 $\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{z^2 + k^2}$$

で定義する．γ は $\mathbb{C}$ 内の原点を中心とした半径 R の円周上を正の向きに，$z = R$ から $z = -R$ まで半周したのち，実軸上を $z = -R$ から $z = R$ まで戻る閉曲線とする．

(i)　線積分

$$\oint_{\gamma} f(z)dz$$

を求めよ．

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

の値を (i) の結果を用いて求めよ．

(2)　$\mathbb{C}$ の連結開集合 Ω で正則な関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ を考える．ここで，$u(x,y)$, $v(x,y)$ はそれぞれ $f(z)$ の実部と虚部とする．

(i)　コーシー・リーマン方程式を書け．(証明は必要ない.) これを用いて，$|f'(z)|^2$ を

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

を用いて表せ．

(ii)　空でない開集合 $D \subset \Omega$ が存在して，$u(x,y)$ が D 上定数関数であれば，$f(z)$ は Ω で定数関数であることを示せ．

(3)　級数

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + k^2}$$

は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，$g(\frac{1}{t})$ は $t = 0$ で正則でないことを示せ．

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[9]　μ を閉区間 $[0,1]$ 上のルベーグ測度とし, $f(x)$ と $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ を $[0,1]$ 上のルベーグ可測関数とする. $\epsilon \in (0,1)$ と $n=1,2,\dots$ に対し,

$$E_{n,\epsilon} = \{ x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \}$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \min(|f_n(x) - f(x)|, 1)dx \geq \epsilon\mu(E_{n,\epsilon})$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \min(|f_n(x) - f(x)|, 1)dx \leq \mu(E_{n,\epsilon}) + \epsilon$ を示せ.

(3) 任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\epsilon}) = 0$ であるならば,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \min(|f_n(x) - f(x)|, 1)dx = 0$$

が成り立つことを示せ.

(4) ほとんどいたるところ $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ であるならば, 任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\epsilon}) = 0$ が成り立つことを示せ.

(5) (4) の逆は成り立たない. このことを反例を用いて示せ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[10] n を自然数とする. X, Y は確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された整数値のみをとる離散型確率変数で, 整数 j, k に対して

$$\mathrm{P}(X=j, Y=k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{j!k!(n-j-k)!} p^j q^k r^{n-j-k} & (0 \le j,\ 0 \le k,\ j+k \le n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を満たすとする. ただし p, q, r は $p+q+r=1$ を満たす正の実数である.

(1) n 以下の非負の整数 k に対する $p(k) = \mathrm{P}(Y=k)$, および $\mathrm{E}[Y]$ を q を用いて表せ.

(2) n 以下の非負の整数 k と j に対して, 事象 $Y=k$ が与えられたときの事象 $X=j$ の条件付確率を $p(j|k)$ と表す. $p(j|k)$ を p, q を用いて表せ.

(3) n 以下の非負の整数 k に対して, X_k を $\mathrm{P}(X_k = j) = p(j|k)$ $(0 \le j \le n)$ となるような確率変数とする. X_k の平均 $\mathrm{E}[X_k]$ を $f(k)$ とおくとき, $f(k)$ を p, q を用いて表せ.

(4) 2 変数実数値関数 $g(x, y)$ に対して $G(k) = \mathrm{E}[g(X_k, k)]$ $(0 \le k \le n)$ とおくとき

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \mathrm{E}[G(Y)]$$

が成り立つことを示せ.

(5) 任意の実数値関数 $h(y)$ に対して

$$\mathrm{E}[\{X - h(Y)\}^2] \ge \mathrm{E}[\{X - f(Y)\}^2]$$

が成り立つことを示せ. ここで f は (3) の通りとする.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午後)

[11] 以下の問に答えよ．

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を定数とする．次の常微分方程式の初期値問題 (A) を考える．

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x''(t) = \big(x(t)\big)^3, \\ x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta. \end{cases}$$

(i) (A) の解 $x = x(t)$ は次を満たすことを示せ．

$$\big(x'(t)\big)^2 = \frac{1}{2}\big(x(t)\big)^4 - \left(\frac{1}{2}\alpha^4 - \beta^2\right).$$

(ii) $\alpha = 1,\ \beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき (A) の解を求めよ．

(2) $\alpha > 0$ を定数とし，f を閉区間 $[0,1]$ 上の正値連続関数とする．いま， $[0,1]$ 上で定義された C^2 級関数 $x = x(t)$ が次の常微分方程式の境界値問題 (B) の解であるとする．

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} x''(t) = f(t)\big(x(t)\big)^3, \quad t \in (0,1), \\ x(0) = \alpha,\ x(1) = 0. \end{cases}$$

(i) $x(t)$ が $[0,1]$ 上，最小値をとる t_0 に対し, $x(t_0) < 0$ とならないことを示せ．

(ii) $x(s) = 0$ となる $s \in (0,1)$ が存在すれば，$x'(s) = 0$ であることを示せ．

(iii) 任意の $t \in (0,1)$ に対し，$x(t) > 0$ が成り立つことを示せ．

(iv) (B) を満たす x は存在すれば，ただ一つであることを示せ．