平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ.

[1] A を n 次正方行列で, 正の整数 k に対して, $A^k = O$, $A^{k-1} \neq O$ とする．また, $V^{(l)} = \mathrm{Ker}A^l$ $(0 \leq l \leq k)$ とおく．ただし, A^0 は n 次単位行列とする．また, n 次正方行列 B に対し, $\mathrm{Ker}B$ は, B を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への線形写像とみたときの核（カーネル）とする．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A は正則でないことを示せ.

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を満たす $\boldsymbol{o}$ (ゼロ) でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在することを示せ.

(3) $V^{(l)}$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であることを示せ.

(4) $1 \leq l \leq k$ として, 次を示せ.

i) $V^{(k)} = \mathbb{C}^n \supset V^{(k-1)} \supset \cdots \supset V^{(1)} \supset V^{(0)} = \{\boldsymbol{o}\}$

ii) $V^{(l)} \neq V^{(l-1)}$

iii) $AV^{(l)} \subset V^{(l-1)}$

(5) $k = n$ のとき, $\boldsymbol{v}_l$ $(1 \leq l \leq n)$ を $\boldsymbol{v}_l \in V^{(l)}$ かつ $\boldsymbol{v}_l \notin V^{(l-1)}$ なるベクトルとする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立であることを示せ.

(6) $k = n$ のとき, A のジョルダン標準形を求めよ．また, A によって定まる線形写像の表現行列がジョルダン標準形となるような $\mathbb{C}^n$ の基底を１組求めよ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[2] 領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}$ から $R = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, s > 0\}$ への写像 φ を $(s,t) = \varphi(x,y) = (xy, x-y)$ で定める. 次の問に答えよ.

(1) φ は全単射であることを示せ.

(2) φ の関数行列（ヤコビ行列）

$$J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial t}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial t}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(3) (2) の $J\varphi(x,y)$ の逆行列 $(J\varphi(x,y))^{-1}$ を x, y で表せ.

(4) φ の逆写像を $(x,y) = \varphi^{-1}(s,t)$ と表す. 写像 φ^{-1} の関数行列式（ヤコビアン）$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ を s,t で表せ.

(5) D 上の C^1 級関数 $F(x,y)$ が D 上で $xF_x = yF_y$ を満たすとき, F は $(0,\infty)$ 上で定義された C^1 級関数 f により $F(x,y) = f(xy)$ と表されることを示せ.

(6) (5) の F が $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0\}$ 上の連続関数ならば, F は $\partial D = \overline{D} \setminus D$ 上で定数であることを示せ.

(7) $(0,1]$ 上の非負値連続関数 $g(x)$ が ある $\alpha < 1$ に対して $x^\alpha g(x)$ が $(0,1]$ 上で有界であるならば広義積分 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ は収束することを示せ.

(8) $E = \{(x,y) \in D \,|\, xy \leq 1,\ x-y \geq 0\}$ とおく. $\beta \in \mathbb{R}$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_E (x+y)^{-1}(xy)^{-\beta}dxdy$ は収束するかどうかを調べよ. さらに収束するときはその値も求めよ.

平成２３年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 (午前)

[3] A, B を位相空間 X の空でない部分集合とする. $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$ で, A, B には X から誘導される位相が入っているものとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 以下の命題について, 正しければ証明を与え, 正しくなければ反例を挙げよ.

(i) A, B が共に連結なら, X も連結である.

(ii) X が連結なら, A または B は連結である.

(iii) A, B が共にコンパクトなら, X もコンパクトである.

(iv) X がコンパクトなら, A または B はコンパクトである.

(2) $f_1 : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : B \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続写像で, 制限写像 $f_1|_{A\cap B}$, $f_2|_{A\cap B}$ が一致するものとする. このとき写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x \in A) \\ f_2(x) & (x \in B) \end{cases}$$

で定める. A, B が共に開集合ならば f は連続写像になることを示せ.

(3) (2) の問題において, 「A, B が共に開集合である」という仮定を落とせば, f は一般には連続でなくなる. そのような例を一つ構成せよ.