平成２４年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 4 次元実線形空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ により生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を U, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ により生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ により生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W とする.

A を以下の (a)-(c) を満たす 4 次実正方行列とする.

(a) A は対称行列である.
(b) 固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は $\lambda^2(\lambda-1)^2$ である.
(c) A の固有値 1 に対する固有空間は U である.

このとき, 次の問に答えよ. ただし, $\mathbb{R}^4$ には標準内積が入っているものとする.

(1) U の直交補空間 $U^\perp$ が W であることを示せ.

(2) V の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ（基底を与えよ）.

(3) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $U \cap V$ を求めよ（基底を与えよ）.

(4) A の固有値 0 に対する固有空間は W である. その理由を述べよ.

(5) A を求めよ.

(6) A の定める線形変換を $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ とする. $\dim T_A(V)$ を求めよ.

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[2] 次の問 (A)(1)-(5) および (B)(1)-(2) に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 f が $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ を満たすとする．関数 $g(x) = e^{-x}f(x)$ の第 2 次導関数は $g''(x) = 0$ を満たすことを示せ．

(2) a を実数とする．定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos ax\,dx$ を求めよ．

(3) 区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ において $\sqrt{3}x \leq 2\sin x$ が成り立つことを示せ．

(4) 区間 $(-1,1)$ 上の関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ について，第 n 次微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ とおく．広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような実数 α の範囲を求めよ．

(B) f を $\mathbb{R}$ 上で微分可能な関数とする．

(1) L を正定数とする．このとき，次の 2 つが同値であることを示せ．

(i) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ が成り立つ．

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f'(x)| \leq L$ が成り立つ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．方程式 $f(x) = 0$ が相異なる n 個の実数解をもつならば，方程式 $f'(x) = 0$ は相異なる実数解を少なくとも $n-1$ 個もつことを示せ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科
第二次入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目 I

[3] 次の問 (A) および (B)(1)-(4) に答えよ．

(A) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，Y を集合，$p : X \to Y$ を写像とする．Y の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \{V \subset Y \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$$

と定義するとき，$\mathcal{O}'$ は Y 上の位相であることを示せ．

(B) X をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ とし，$\mathbb{Z}^2 = \{\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \in \mathbb{Z},\ a_2 \in \mathbb{Z}\}$ とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ に対し，関係 $\sim$ を

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^2$$

と定義する．

(1) $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ．

以下，商集合 $X/\!\sim$ を Y と書き，$\boldsymbol{x} \in X$ を含む同値類を $[\boldsymbol{x}] \in Y$ と書く．写像 $\pi : X \to Y$ を $\pi(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]$ により定める．

(2) n を整数とする．このとき，

$$\mu_n([\boldsymbol{x}]) := [n\boldsymbol{x}]$$

により Y から Y への写像 μ_n を定めることができることを示せ．

(3) 集合 Y の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \{V \subset Y \mid \pi^{-1}(V) \text{ は } X \text{ の開集合 }\}$$

と定義すると，(A) の結果により $(Y, \mathcal{O}')$ は位相空間となる．このとき，(B)(2) で定めた写像 $\mu_n : Y \to Y$ は連続写像であることを示せ．

(4) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ はコンパクトであることを示せ．