平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] 可換環 R において $a_1, \ldots, a_n$ の生成するイデアルを $(a_1, \ldots, a_n)$ と表すことにする．$\mathbb{C}^3$ の部分集合

$$V = \{(t,0,0) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0,t,0) \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

を考え，3 変数多項式環 $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ の部分集合 I を

$$I = \{f(X,Y,Z) \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \mid \forall (a,b,c) \in V,\ f(a,b,c) = 0\}$$

により定める．以下の問に答えよ.

(1) I は $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ のイデアルであることを示せ.

(2) $\mathbb{C}[X,Y,Z]/I$ は 直積環 $\mathbb{C}[T]^3 = \mathbb{C}[T] \times \mathbb{C}[T] \times \mathbb{C}[T]$ の部分環

$$S := \{(\alpha(T), \beta(T), \gamma(T)) \in \mathbb{C}[T]^3 \mid \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0)\}$$

に同型であることを示せ．ただし，$\mathbb{C}[T]$ は T を変数とする一変数多項式環である.

(3) I は素イデアルではないことを示せ.

(4) $I = (X,Y) \cap (Y,Z) \cap (Z,X)$ を示せ.

(5) $I = (XY, YZ, ZX)$ を示せ.

(6) I は 2 個の元では生成されないことを示せ.

(7) 環準同型 $\varphi : \mathbb{C}[X,Y,Z] \to \mathbb{C}[X,Y]$ を $\varphi(f(X,Y,Z)) = f(X,Y,1-X-Y)$ で定める．$\varphi(I)$ の生成する $\mathbb{C}[X,Y]$ のイデアルは，2 個の元で生成されることを示せ.

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[5] $K \subset \mathbb{C}$ は実数体には含まれない体で，$a \in K$ ならば，その複素共役 $\overline{a}$ も K に含まれると仮定する．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f : K \to K$ を $f(a) = \overline{a}$ で定義する．f は体の同型であることを示せ．

(2) K から K への体の同型全体がなす群 G の元として，f の位数を求めよ．

(3) f が生成する G の部分群を H とするとき，H の固定部分体は $K \cap \mathbb{R}$ であることを示せ．

(4) 体拡大 $K \supset K \cap \mathbb{R}$ の拡大次数 $[K : K \cap \mathbb{R}]$ は 2 であることを示せ．

(5) 適当な $a \in K \cap \mathbb{R}$ を取れば $K = (K \cap \mathbb{R})[\sqrt{a}]$ が成り立つことを示せ．

(6) 体 $L \subset \mathbb{C}$ で $[L : L \cap \mathbb{R}] > 2$ となるものの例をあげよ．

(7) 体 $L \subset \mathbb{C}$ が $\infty > [L : L \cap \mathbb{R}] > 2$ を満たすならば，$L \supset L \cap \mathbb{R}$ はガロア拡大でないことを示せ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**6**]　$M_2(\mathbb{R})$ を 2×2 の実行列の全体の集合とし，自然に $\mathbb{R}^4$ と同一視する．また，

$$G := \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$$

とおく．ただし $\det(g)$ は g の行列式を表す．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ のヤコビ行列とその階数を求めよ．

(2) G が 3 次元可微分多様体となることが，(1) から分かる．その理由を簡単に述べよ．

(3) 2×2 の単位行列を e で表し，G の e での接空間を

$$T_eG := \{c'(0) \in M_2(\mathbb{R}) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G : C^\infty\text{-級},\ c(0) = e\}$$

で定義する．このとき次を定義に従って示せ：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in T_eG.$$

(4) G の e での接空間 T_eG がどのような集合になるかを予想し，それを示せ．

(5) $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とおく．各 $g \in G$ に対して，写像 $\varphi_g : M \to M$ を

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対して, } \varphi_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

によって定義する．さらに，

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく．このとき，各 $z \in M$ に対して，次の集合を図示せよ：

$$N.z := \{\varphi_g(z) \in M \mid g \in N\}.$$

(6) 任意の $z, z' \in M$ に対して，$N.z$ を $N.z'$ に移す G の元が存在することを示せ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[7] 以下の問 (A) (1)-(4) および (B) (1)-(4) に答えよ．ただし $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．

(A) 次の問に答えよ．

(1) 円周 S^1 のホモロジー群を求めよ．

(2) M をメビウスバンドとする．M のホモロジー群を求めよ．

(3) メビウスバンド M の境界 ∂M から M への包含写像 j が誘導するホモロジー群の間の準同型を求めよ．

(4) メビウスバンド M とそのコピー M' を用意し，$i : \partial M \to \partial M'$ を $x \in \partial M$ に対してそのコピー $x' \in \partial M'$ を対応させる同相写像とする．M と M' を i で貼り合わせて得られる空間 N のホモロジー群を求めよ．

(B) 定義式 $p(z) = z^3$ により定まる被覆写像 $p : S^1 \to S^1$ を考える．

(1) 基本群 $\pi_1(S^1)$ および誘導準同型写像 $p_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ を求めよ．

(2) 写像 $f : [0,1] \to S^1$ を $f(t) = e^{2\pi i t}$ で定める．このとき，連続写像 $\tilde{f} : [0,1] \to S^1$ で $f = p \circ \tilde{f}$ となるものをすべて求めよ．

(3) 区間 $[0,1]$ の両端点を同一視して得られる位相空間 A と商写像 $q : [0,1] \to A$ を考える．(2) の写像 f に対して，連続写像 $g : A \to S^1$ で $f = g \circ q$ となるものが存在することを証明せよ．更に g が同相写像であることを証明せよ．

(4) (3) の写像 g とホモトピックな連続写像 $h : A \to S^1$ を考える．このとき，連続写像 $\tilde{h} : A \to S^1$ で $h = p \circ \tilde{h}$ となるものは存在しないことを証明せよ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[8]　$\mathbb{H}$ を上半平面，すなわち $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1)　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は $\mathbb{H}$ で正則とする．ただし，$z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ で，$u(x, y)$, $v(x, y)$ はそれぞれ $f(z)$ の実部と虚部とする．このとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が $\mathbb{H}$ で成り立つことを示せ．

(2)　$g(z) = \overline{z}$ は z の正則関数でないことを示せ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(3)　変換

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

は $\mathbb{H}$ を $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ に全単射かつ等角に写すことを示せ．

(4)　$f(z)$ は $\mathbb{H}$ で正則，かつ $\mathbb{H}$ の境界までこめて連続とする．さらに，ある定数 $C \geq 0$ が存在して，任意の $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ に対し

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^{-1}$$

を満たすとする．このとき，任意の $z \in \mathbb{H}$ に対し

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}\, dx$$

を示せ．

(5)　$\mathbb{H}$ で正則，かつ $\mathbb{H}$ の境界までこめて連続な $f(z)$ が，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = x$ を満たすならば，任意の $z \in \mathbb{H}$ に対し $f(z) = z$ であることを示せ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[9]　$a \in (0, \infty)$ とし，g を $[a, \infty)$ 上の有界な実数値ルベーグ可測関数で $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ を満たすものとする．関数 $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ を $f(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{g(u)}{u} du\right)$ で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $t \geq 1$ とするとき，$\lim_{n \to \infty} \int_1^t \frac{g(nv)}{v} dv = 0$ を示せ．

(2) $t \geq 1$ とするとき，$\lim_{n \to \infty} \frac{f(tn)}{f(n)} = 1$ を示せ．

(3) $M \in [a, \infty)$ を十分大きく取り $x \geq M$ なるすべての x に対し $g(x) \leq 1$ となるとき，次が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{f(tx)}{f(x)} \leq t \qquad (x \geq M, \quad t \geq 1)$$

(4) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{nf(n)} \int_n^{2n} f(u) du$ を求めよ．

(5) $a = e,\ g(x) = \frac{1}{\log x}$ の場合に，f を求めよ．

(6) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \int_n^{2n} (\log u)^2 du$ を求めよ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[10] $\mathrm{E}(X^8) < \infty$ を満たす確率変数 X に対し，

$$\mathrm{E}(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \quad \alpha_k = \mathrm{E}\{(X-\mu)^k\} \quad (k = 2, 3, 4)$$

とおき，$\sigma^2 > 0$ を仮定する．確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ は独立同分布で，X_1 は X と同じ確率分布に従うとする．$\bar{X}$, S^2, $\hat{\alpha}_4$, $\tilde{\alpha}_k$ $(k = 2, 3, 4)$ を

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad \hat{\alpha}_4 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4, \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^k$$

により定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $S^2 - \sigma^2$ と $\hat{\alpha}_4$ が以下のように変形できることを示せ．

$$S^2 - \sigma^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i-\mu)^2 - \sigma^2\right\} - (\bar{X}-\mu)^2 + \frac{\alpha_2}{n}\right],$$
$$\hat{\alpha}_4 = \frac{n}{n-2}\left\{\tilde{\alpha}_4 - 4(\bar{X}-\mu)\tilde{\alpha}_3 + 6(\bar{X}-\mu)^2\tilde{\alpha}_2 - 3(\bar{X}-\mu)^4\right\}.$$

(2) $n \to \infty$ のとき，$\bar{X} - \mu$ が 0 に確率収束することを示せ．

(3) $n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)^2$ が 0 に確率収束することを示せ．

(4) $\sigma^4 = (\sigma^2)^2$ とする．$n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2)/\sqrt{\alpha_4 - \sigma^4}$ の確率分布が標準正規分布に分布収束することを示せ．

(5) $n \to \infty$ のとき，$\tilde{\alpha}_k$ が α_k に確率収束することを示せ．ただし $k = 2, 3, 4$ とする．

(6) $S^4 = (S^2)^2$ とする．$n \to \infty$ のとき，$\hat{\alpha}_4 - S^4$ が $\alpha_4 - \sigma^4$ に確率収束することを示せ．

(7) $n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2)/\sqrt{\hat{\alpha}_4 - S^4}$ の確率分布が標準正規分布に分布収束することを示せ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[11] $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(t,y)$ に対し，常微分方程式の初期値問題

$$
\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = f(t,y(t)) \quad (t \geq 0) \\ y(0) = y_0 \end{cases}
$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\ell \in \mathbb{R}$ とする．$f(t,y) = y(1+t)^{\ell}$ のとき，(E) の解を求めよ．

(2) (E) は積分方程式 $y(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s,y(s))\,ds$ $(t \geq 0)$ と同値であることを示せ．

(3) $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で C^1 級な関数 $f(t,y)$ の y に関する偏導関数 f_y が $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で有界のとき，f は次の条件 (L) を満たすことを示せ．

(L) $[0,\infty)$ 上の連続関数 $a(t)$ が存在し，
$t \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}$ ならば $|f(t,x)-f(t,y)| \leq a(t)|x-y|$ を満たす．

(4) f は条件 (L) を満たし，条件 (L) における $[0,\infty)$ 上の連続関数 a が $[0,\infty)$ 上で可積分とする．このとき (E) の解 y は $[0,\infty)$ 上で存在し，その解はただ一つであることを示せ．

(5) f は単に $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で C^1 級であるとき，次の命題 (P) が正しいと思うならばそれを示せ．正しくないと思うのであれば反例を挙げよ．

(P) (E) の解は初期値 y_0 の選び方によらず $[0,\infty)$ 上で存在する．

(6) f は (4) で述べた条件を満たし，さらに $f(t,0)$ が $[0,\infty)$ 上で可積分とする．このとき (E) の解 y は $[0,\infty)$ 上で有界であることを示せ．

(7) f は (4), (6) で述べた条件を満たすとする．このとき (E) の解 y に対し極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$ が存在することを示せ．

(8) f は (4), (6) で述べた条件を満たし，さらに任意の $t \geq 0$ に対し $f(t,0)=0$ を満たすとする．(E) の解 y に対し $y_\infty = \displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$ とおくとき，次が成り立つことを示せ．

$$
|y(t)-y_\infty| \leq |y_\infty| \left\{ \exp\left(\int_t^\infty a(s)ds \right) - 1 \right\} \qquad (t \geq 0).
$$