平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[1] A, B を n 次複素正方行列とする．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$V_A(\alpha) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}\}$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $V_A(\alpha)$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であることを示せ．

(2) $AB = BA$ と仮定する．$\boldsymbol{v}$ を A の固有値 α に対する固有ベクトルとするとき，$B\boldsymbol{v}$ は零ベクトルであるか，または A の固有値 α に対する固有ベクトルであることを示せ．

(3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$AB = BA$ が成り立っている．

(a) A の固有値を求め，各固有値 α に対する固有空間 $V_A(\alpha)$ の基底を与えよ．

(b) B の定める線形変換を $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ と書く．(a) で与えた各固有空間 $V_A(\alpha)$ の基底に関して，f を $V_A(\alpha)$ に制限して得られる線形変換 $f|_{V_A(\alpha)} : V_A(\alpha) \to V_A(\alpha)$ を行列表示せよ．

(c) A, B を同時対角化せよ．(すなわち，$P^{-1}AP$ および $P^{-1}BP$ が同時に対角行列になるような正則行列 P を与えよ．)

(4) $n = 2$ で A が対角化可能でないとする．このとき，

$$AB = BA \iff \text{ある } s, t \in \mathbb{C} \text{ について } B = sA + tE$$

を示せ．ただし E は 2 次単位行列とする．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の問に答えよ．

(1) $x \in (-1,1)$ のとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ の和を求めよ．

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ は開区間 $(-1,1)$ 上で一様収束しないことを示せ．

(3) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ は開区間 $(-1,1)$ 上で広義一様収束することを示せ．

(4) s を実数とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ が収束するような s の範囲を求めよ．(答だけでよい．)

(5) 関数項級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{x}{n}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(6) $x \in (-1,1)$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \log(1+x)$ を示せ．

(7) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の和を求めよ．

平成２４年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目(午前)

[3] 次の問 (A) (1)〜(5) および (B) (1),(2) に答えよ.

(A) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ について次の問に答えよ.

(1) A を $\mathbb{R}^2$ の部分集合，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ とする．(a,b) が A の内点であることの定義を述べよ．また A が開集合であることの定義を述べよ.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき $c \in \mathbb{R}$ に対して $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > c\}$ が開集合であることを (1) で与えた定義に従って示せ.

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が閉集合である（すなわち，A の補集合 A^c が開集合である）とする．このとき，A の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ が (a,b) に収束するならば (a,b) は A に属することを示せ.

(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ の閉包は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ であることを示せ.

(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x^2\}$ は連結でないことを示せ.

(B) 次の問に答えよ.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ が成り立つならば，f は最小値をもつことを示せ.

(2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき

- $f(0) = g(0)$,
- $\cos f(t) = \cos g(t)$ $(t \in [0,1])$,
- $\sin f(t) = \sin g(t)$ $(t \in [0,1])$

の 3 つが成り立つならば，$f = g$ であることを示せ.