平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専　門　科　目

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ.

[**1**]

　2つの変数 x, y に対して, 複素線形空間 $V = \left\{ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\right\}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) V の次元を求めよ（答えだけでよい).

(2) $g = g(x, y) = x^3 + y^3, h = h(x, y) = x^2y + xy^2$ とおく. $W = \{sg + th \mid s, t \in \mathbb{C}\}$ は V の部分空間となることを示せ. また, $\{g, h\}$ は W の基底となることを示せ.

(3) W の元 $f = f(x, y)$ に対し $\varphi(f)$ を $\varphi(f) = y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と定義する. φ は W から W への線形写像を定めることを示せ.

(4) 基底 $\{g, h\}$ に関する φ の行列表示 A を求めよ.

(5) φ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専　門　科　目

[**2**]

関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級の関数とする. ただし関数が $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級であるとは, 2 階までの偏導関数が全て存在してしかもそれらが全て連続関数になることをいう. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ が点 $(x,y)=(0,0)$ で極小値を取るとはどういうことか. 定義を述べよ.

(2) $f(x,y)$ が点 $(x,y)=(0,0)$ で極小値を取るならば, $f(x,0)$ を x の関数と見たときに $f(x,0)$ は $x=0$ で極小値を取ることを示せ.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)>0$ であると仮定する. このとき $f(x,0)$ を x の関数と見ると, $f(x,0)$ は $x=0$ で極小値を取ることを証明せよ. 必要なら平均値の定理を使っても良い.

(4) a は正の実数とし, $h(x,y)=x^2+axy+y^2$ とおく. 閉集合

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -1\le x\le 1, -3\le y\le 3\}$$

での $h(x,y)$ の最小値を求めよ.

(5) 小問 (4) の a と $h(x,y)$ と D について, $\iint_D xyh(x,y)dxdy$ を求めよ.

(6) $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $F(x,y)$ が次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$(*)$ 原点を通る任意の直線 $L:\alpha x+\beta y=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, に対し, 関数 $F(x,y)$ の L への制限は点 $(0,0)$ で極小値を取る.

このとき $F(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値を取るか. 極小値を取るならばそれを証明し, そうでなければ反例を挙げよ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専攻	専　門　科　目

[**3**]

直線 $\mathbb{R}$ およびユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を通常のユークリッド距離によって距離空間とみなす．写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x$ により定義する．次の問いに答えよ．

(1) 一般に d を距離とする距離空間 X における開集合の定義を述べよ．

(2) 一般に X, Y が位相空間であるとき, 写像 $g : X \to Y$ が連続であることの定義を述べよ．

(3) 写像 f が連続であることを小問 (1), (2) の定義に従って証明せよ．

(4) $U \subset \mathbb{R}^2$ が開集合なら, $f(U)$ も $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．

(5) 閉集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ で, $f(C)$ が $\mathbb{R}$ の閉集合にならない例を挙げよ．C が閉集合である理由, また $f(C)$ が閉集合にならない理由は説明しなくても良い．

(6) 閉集合の定義は, 補集合が開集合であることとする．距離空間 X の部分集合 A が閉集合になるための必要十分条件は, 次の条件 $(*)$ を満たすことである．閉集合の定義に基づいてこれを示せ．

　$(*)$ A 内の無限点列 $x_1, x_2, \ldots$ が X 内の点 x_∞ に収束するなら, x_∞ は A の点になる．

(7) $A \subset \mathbb{R}^2$ が有界閉集合なら, $f(A)$ も有界閉集合になることを示せ．必要なら「$\mathbb{R}$ 内の任意の有界数列 $y_1, y_2, \ldots$ は収束部分列を持つ」 という事実を用いても構わない．