平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

[**4**] 整数係数の 1 変数多項式のなす可換環 $\mathbb{Z}[X]$ において $f_1, \ldots, f_n$ の生成するイデアルを $(f_1, \ldots, f_n)$ と表すことにする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 を持つ可換環 R の真のイデアル $I \subsetneq R$ について, I が素イデアルであることと, R/I が整域となることとが同値であることを示せ．ただし R の真のイデアル I が素イデアルであるとは, $a, b \notin I$ となる全ての $a, b \in R$ に対し $ab \notin I$ が成り立つこととする．

(2) 1 を持つ可換環 R の真のイデアル $I \subsetneq R$ について, I が極大イデアルであることと, R/I が体となることとが同値であることを示せ．ただし R の真のイデアル I が極大イデアルであるとは, $I \subsetneq J \subsetneq R$ となるようなイデアル J が存在しないこととする．

(3) (X) は $\mathbb{Z}[X]$ の素イデアルであることを示せ．

(4) I が (X) を含む $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルであるとすると，ある素数 $p \in \mathbb{Z}$ が存在して $I = (p, X)$ となることを示せ．

(5) (X^2+1) は $\mathbb{Z}[X]$ の素イデアルであることを示せ．

(6) $(3, X^2+1)$ は $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルであることを示せ．

(7) $(5, X^2+1)$ を含む $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルをすべて求めよ．

(8) (a, X^2+1) が $\mathbb{Z}[X]$ の極大イデアルとなる正整数 a をすべて求めよ．

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**5**]　体 F に対して，F の元を成分に持つ正則 2 次正方行列のなす群を $\mathrm{GL}(2,F)$ と書く．2 次の単位行列を E と書く．また，S_3 を 3 次対称群，$\sigma=(1\ 2)$, $\tau=(1\ 3)\in S_3$ とする．

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ について，$a+d=-1$, $ad-bc=1$ のとき $A^3=E$ となることを示せ.

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ について, $A\neq \pm E$ かつ $A^2=E$ となるための必要十分条件は $a+d=0$ かつ $ad-bc=-1$ であることを示せ.

(3) S_3 の各元を σ と τ の積として表せ．また，S_3 の部分群をすべて求めよ.（どちらも答えだけで良い.）

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ の元 B で, B の位数が 2, AB の位数が 3 となるようなものをひとつみつけよ. (B の成分としては有理数しか許されていないことに注意せよ．)

(5) A は小問 (4) のとおり, また B は小問 (4) でみつけたものとする．単射準同型 $\varphi: S_3\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ であって，$\varphi(\sigma)=A$, $\varphi(\tau)=B$ となるものがただひとつ存在することを示せ.

(6) $\zeta:=e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\gamma:=\zeta+\zeta^{-1}$ とする．γ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の元であること，また，多項式環 $\mathbb{C}[X]$ において $X^2-\gamma X+1$ は $X^4+X^3+X^2+X+1$ を割り切ることを示せ.

(7) 単射準同型 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ をひとつ構成せよ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**6**]　$\mathbb{R}^3$ における xz 平面内の円 $(x-a)^2+z^2=r^2$ (ただし, $a>r>0$) を z 軸の回りに回転してできる曲面を M とする. また, この円周上の点 $(a+r\cos\alpha, 0, r\sin\alpha)$ を z 軸の回りに β だけ回転した点の座標を $(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), z(\alpha,\beta))$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $f(\alpha,\beta)=(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), z(\alpha,\beta))$ で定める. このとき f のヤコビ行列の階数は常に 2 であることを示せ.

(2) 写像 $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $p(x,y,z)=x$ で定める. このとき, 関数 $p\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の臨界点をすべて求めよ.

(3) 写像 p の M への制限を g とする. 関数 $g:M\to\mathbb{R}$ の臨界点をすべて求めよ.

(4) M 上の微分可能な関数は臨界点を少なくとも 2 個もつことを示せ.

(5) M 上の微分可能な関数で臨界値（つまり臨界点の像）の個数が丁度 2 個となる例を一つあげよ. その理由も述べること.

(6) (3) で定めた $g:M\to\mathbb{R}$ について, $g^{-1}(a)$ は滑らかな多様体になるか. また, $g^{-1}(a-r)$ は位相多様体になるか. 理由をつけて答えよ.

(7) 曲面上の曲線 $\gamma(t)$ の 2 階微分 $\gamma''(t)$ を接平面方向と法線方向に分解したとき, 接平面成分が常に 0 ならば $\gamma(t)$ を測地線という. 曲面 M 上の曲線 $\gamma_1(t)=(x(0,t), y(0,t), z(0,t))$ は測地線であることを示せ. また, 曲面 M 上の曲線 $\gamma_2(t)=(x(\pi/2,t), y(\pi/2,t), z(\pi/2,t))$ は測地線でないことを示せ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**7**]　以下の問 (A) (1)-(5) および (B) (1)-(4) に答えよ．

(A) 次の問に答えよ．

(1) 複素平面 $\mathbb{C}$ の中の 2 つの道 $f, g : I = [0, 1] \to \mathbb{C}$ を $f(x) = e^{\pi i x}$，$g(x) = e^{-\pi i x}$ で定める．このとき f と g は $\partial I = \{0, 1\}$ を動かさずにホモトピックであることを証明せよ．

(2) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$，$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．連続写像 $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ で，S^1 への制限 $\varphi|_{S^1}$ が S^1 上の恒等写像 1_{S^1} であり，像 $\varphi(\mathbb{C}^*)$ が S^1 となるものを与えよ．

(3) (2) の連続写像 φ は $\mathbb{C}^*$ 上の恒等写像 $1_{\mathbb{C}^*}$ とホモトピックであることを証明せよ．

(4) $\mathbb{C}^*$ の基本群を求めよ．

(5) (1) の道 f，g を $\mathbb{C}^*$ の中の道と考えるとき，この 2 つの道の間には ∂I を動かさないホモトピーが存在しないことを証明せよ．

(B) 次の問に答えよ．

(1) ３つの頂点 v_0，v_1，v_2 により張られる 2 単体 $|v_0 v_1 v_2|$ の全ての辺単体全体が作る単体的複体を K とする．この単体的複体 K の単体的ホモロジー群を定義に従って計算せよ．

(2) トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の 2 次元ホモロジー群 $H_2(T^2)$ は $\mathbb{Z}$ と同型である．その理由を述べよ．

(3) T^2 上の自己同相写像 f で誘導準同型写像 $f_* : H_2(T^2) \to H_2(T^2)$ が恒等写像でないものを与えよ．

(4) 球面 S^2 からトーラス T^2 への任意の連続写像 h に対して，その誘導準同型写像 $h_* : H_2(S^2) \to H_2(T^2)$ は零写像になることを証明せよ．(ヒント：T^2 の普遍被覆空間を考えよ.)

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**8**]　以下の問に答えよ．

(1)　$\mathbb{C}$ 上の関数 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \cos z$ について，$f''(z)$ を求めよ．

(2)　$R > \pi$ のとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + \cos z}{(z - \pi\,\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z.$$

(3)　有限の長さ L をもつ $\mathbb{C}$ 内の曲線 C を考える．$\mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $f(z)$ が曲線 C 上で連続であり，かつ C 上で $|f(z)| \leqq M$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqq ML.$$

(4)　関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が一様連続であるとき，$\delta > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$|z| \leqq n\delta \quad ならば \quad |f(z) - f(0)| \leqq n$$

であることを証明せよ．

(5)　正則関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について，次の 2 条件（i)，(ii）が同値であることを証明せよ．

（i）f は一様連続である．

（ii）定数 $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ が存在して，$f(z) = c_0 + c_1 z$（$z \in \mathbb{C}$）．

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**9**] 以下の問に答えよ.

(1) 正の整数 n と正の実数 x に対して $e^{-x} < (1+x/n)^{-n} \leq (1+x)^{-1}$ を示せ.

(2) $[0,\infty)$ 上の有界ルベーグ可測関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x/n)^n} - e^{-x}\right)\frac{f(x/n)}{x}dx = 0$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^n} - e^{-nx}\right)\frac{e^{-x}}{x}dx$ を求めよ.

(3) $a > 1$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}dx = \log a$ を示せ.

(4) 正の整数 n に対して次を示せ.

$$\log(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^k}dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+x)^n} - e^{-nx}\right)\frac{e^{-x}}{x}dx.$$

(5) $[0,\infty)$ 上の非負実数値ルベーグ可測関数 f に対して次を示せ.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{f(x)}{(1+x)^k}dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx.$$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{1}{x}dx$ を示せ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**10**]　確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ は独立で，各 X_n は $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする．正の整数 n に対して確率変数 Y_n を次で定める．

$$Y_n := \begin{cases} X_k & \#\{i=1,\ldots,2n+1 | X_i < X_k\} = n \text{ かつ } \#\{i=1,\ldots,2n+1 | X_i > X_k\} = n, \\ X_1 & \text{その他}. \end{cases}.$$

以下の問に答えよ．ただし, 集合 A に対して, $\#A$ は A に含まれる要素の個数を表す.

(1) 正の整数 n と $0 < x < 1$ に対して次を示せ.

$$P(\max_{1 \le i \le n} X_i < x, \min_{n+2 \le i \le 2n+1} X_i > x) = x^n(1-x)^n.$$

(2) $P(\bigcup_{1 \le i < j \le 2n+1} \{X_i = X_j\}) = 0$ を示せ.

(3) 確率変数 Y_n の分布は密度を持ち，密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} x^n(1-x)^n(2n+1)!/(n!)^2 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x \le 0 \text{ or } x \ge 1) \end{cases}$$

で与えられることを示せ.

(4) 非負整数 k, l に対して $\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^l dx$ を求めよ.

(5) 確率変数 Y_n の k 次モーメントを求めよ.

(6) $n \to \infty$ のとき，確率変数 Y_n は $1/2$ に確率収束することを示せ.

平成２５年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**11**]　区間 I 上の連続関数の全体を $C(I)$ であらわす．また I 上 C^1 級の関数の全体を $C^1(I)$ であらわす．次の問 (A)(1)-(2) および (B)(1)-(3) に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) f, g を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，次の常微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}) \quad u'(x) + f(x)u(x) = 0, \\ &(\mathrm{Q}) \quad u'(x) + f(x)u(x) = g(x). \end{aligned}$$

$v \in C^1(\mathbb{R})$ を (Q) の 1 つの解とし，(P) の解全体の集合を X，(Q) の解全体の集合を Y とする．このとき，

$$Y = \{u + v \mid u \in X\}$$

となることを示せ．

(2) 常微分方程式

$$u'(x) + xu(x) = x^3$$

のすべての解を求めよ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) p を $[0, \infty)$ 上の非負値連続関数，C, α を非負定数とする．もし

$$p(x) \leq C + \alpha \int_0^x p(t)\, dt \quad (x \in [0, \infty))$$

が成立するならば，

$$p(x) \leq Ce^{\alpha x} \quad (x \in [0, \infty))$$

が成立することを示せ．

(2) φ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数，$a, u_0 \in \mathbb{R}$ とし，次の初期値問題を考える．

$$(\mathrm{R}) \quad u'(x) + au(x) = \varphi(u(x)) \ \ (x > 0), \quad u(0) = u_0.$$

このとき，$u \in C^1([0, \infty))$ が (R) の解であることと，次が同値であることを示せ．

$$u \in C([0, \infty)) \ \text{かつ}\ u(x) = e^{-ax}u_0 + e^{-ax}\int_0^x e^{at}\varphi(u(t))\, dt \ \ (x \in [0, \infty)).$$

(3) (2) において，さらに次を仮定する：

- $a > 0$.
- $k \in [0, a)$ が存在して，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $|\varphi(s)| \leq k|s|$ が成立する．

このとき，$[0, \infty)$ 上の (R) の解 u は

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$$

を満たすことを示せ．